Г. Я. Юревичъ.

КУРСЪ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЫ

и

СИСТЕМАТИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ.

ЧАСТЬ I.

Изданіе четвертое.

Цѣна 80 коп.

Первое изданіе Ученымъ Комитетомъ Мин. Народн. Просв. **допущено къ употребленію въ качествѣ руководства** во всѣхъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ.

Книгоиздательство Г. Я. ЮРЕВИЧА.
РИГА, Мельничная ул. № 7.
1913.



Типо-литографія А. Шнакенбургъ, Рига,
Конюшенная ул. № 5.

Оглавленіе.

ОТДѢЛЪ I.

ОТДѢЛЪ II.

ОТДѢЛЪ III.

ОТДѢЛЪ I.

Предварительныя понятія.

ГЛАВА I.

§ 1. **Сходныя задачи.** Возьмемъ двѣ задачи:

1. Два парохода идутъ другъ другу навстрѣчу изъ двухъ мѣстъ, лежащихъ на разстояніи 180 верстъ; первый проходитъ въ часъ 14 верстъ, а второй 16 верстъ. Черезъ сколько часовъ они встрѣтятся?

2. Два парохода вышли въ одно время другъ другу навстрѣчу изъ двухъ мѣстъ, лежащихъ на разстояніи 1200 верстъ; первый проходитъ въ часъ 11 верстъ, а другой 13 верстъ. Черезъ сколько часовъ они встрѣтятся?

Сравнивая эти задачи, мы видимъ, что условія у нихъ одинаковы; различаются эти задачи только числовыми данными.

Такія задачи, у которыхъ условія одинаковы, называются сходными.

При изученіи ариѳметики намъ весьма часто приходилось встрѣчать сходныя задачи. Таковы, напримѣръ, задачи различнаго рода на тройное правило, на правило процентовъ, на правило пропорціональнаго дѣленія и т. п.

Очевидно, что сходныя задачи рѣшаются одинаково. Поэтому, зная, какъ рѣшается одна какая-либо задача, мы легко можемъ рѣшить массу задачъ, которыя сходны съ ней. Но чтобы не тратить понапрасну времени и труда на рѣшеніе всевозможныхъ сходныхъ задачъ, обыкновенно составляется для нихъ одно *общее рѣшеніе*, въ которомъ указывается, какія дѣйствія и въ какой послѣдовательности надо произвести надъ данными числами задачи, чтобы получить искомое неизвѣстное.

2. Употребленіе буквъ. Для составленія общихъ рѣшеній числа обозначаютъ не цифрами, а буквами латинскаго или французскаго алфавита: *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, x, y, z.*

Какую брать букву вмѣсто того или другого числа — все равно; но если мы обозначимъ одно число извѣстною буквою, то для обозначенія другихъ чиселъ надо употреблять иныя буквы, — это дѣлается для того, чтобы не смѣшать одного числа съ другимъ. Кромѣ того, принято обозначать извѣстныя числа начальными буквами алфавита: *a, b c* и т. д., а неизвѣстныя — послѣдними буквами: *x, y, z.*

Примѣчаніе. Иногда различныя числа обозначаются одною и тою же буквою: но, чтобы не смѣшать чиселъ, около буквъ съ правой стороны, сверху ставятъ значки: ′, ″, ‴, . . ., или же внизу съ той же стороны ставятъ маленькія цифры: 1, 2, 3 . . . Напримѣръ: a', a'', a'''. . . ., или a_1, a_2, a_3. . . . Читаются такія буквы такъ: a' или a_1, — *a* примъ, или *a* первое; a'' или a_2 — *a* второе; a''' или a_3 — *a* третье и т. д. — Различныя числа обозначаются однѣми и тѣми же буквами тогда, когда эти числа имѣютъ какое-либо общее значеніе, напримѣръ — числа одного наименованія.

§ **3.** Возвратимся теперь къ первой задачѣ изъ предложенныхъ въ началѣ, и обозначимъ въ ней числа буквами. Тогда задача приметъ слѣдующій видъ:

Два парохода идутъ другъ другу навстрѣчу изъ двухъ мѣстъ, лежащихъ на разстояніи *a* верстъ; первый проходитъ въ часъ *b* верстъ, а второй *c* верстъ. Черезъ сколько часовъ пароходы встрѣтятся?

Чтобы рѣшить эту задачу, мы будемъ разсуждать такимъ же образомъ, какъ разсуждали бы въ томъ случаѣ, если бы данныя задачи были выражены числами, а именно: если первый пароходъ проходитъ въ часъ *b* верстъ, а второй *c* верстъ, то, чтобы узнать, на сколько верстъ они приближаются въ часъ, надо *b* и *c* сложить; сумму эту обозначаютъ такъ:

$$b + c.$$

Далѣе, такъ какъ первоначальное разстояніе между пароходами равно *a* верстамъ, то, слѣдовательно, они встрѣтятся черезъ столько часовъ, сколько разъ сумма $b + c$ содержится въ *a*. Частное это обозначается такъ:

$$a : (b + c).$$

Выраженіе $a:(b+c)$ и называется общимъ рѣшеніемъ. Если въ немъ вмѣсто буквъ: a, b и c станемъ подставлять какія угодно числа и выполнимъ указанныя дѣйствія (сложеніе и дѣленіе), то получимъ отвѣты для какихъ угодно задачъ подобнаго рода. Такъ, если вмѣсто a подставимъ 180, вмѣсто b — 14 и вмѣсто c — 16, то получимъ $180:(14+16)=6$, т.-е. получимъ отвѣтъ для первой задачи.

Точно такъ же, если положимъ $a=1200$, $b=11$ и $c=13$, то $a:(b+c)=1200:(11+13)=50$, т.-е. получимъ отвѣтъ для второй задачи и т. п.

§ 4. **Понятіе объ алгебрѣ.** *Наука, имѣющая цѣлью указать, какимъ образомъ составляются общія рѣшенія для сходныхъ задачъ, называется* **алгеброй.**

Кромѣ того, *алгебра имѣетъ своею цѣлью обобщать самыя задачи.* Многія задачи бываютъ хотя и различны по своему содержанію, но данныя и искомыя числа у нихъ находятся въ одинаковой зависимости, такъ что для рѣшенія ихъ надо употреблять одинаковые пріемы. Напримѣръ:

1. Два поѣзда вышли въ одно время навстрѣчу другъ другу изъ станцій А и Б, разстояніе между которыми 540 верстъ; первый поѣздъ проходитъ въ часъ 27 верстъ а другой 28 верстъ. Черезъ сколько часовъ они встрѣтятся?

2. Два пѣшехода отправились — одинъ изъ Петербурга въ Кіевъ, а другой навстрѣчу ему изъ Кіева. Первый проходитъ въ день 26 верстъ, а другой 28 верстъ. Черезъ сколько дней путешественники встрѣтятся, если извѣстно, что отъ Кіева до Петербурга 1485 верстъ?

Сравнивая эти задачи съ первыми, мы легко можемъ замѣтить большое сходство, а именно: искомыя числа и данныя у всѣхъ ихъ находятся въ одинаковой зависимости между собою. Поэтому, для подобныхъ задачъ составляется одна общая задача и одно общее рѣшеніе.

Общій видъ для подобныхъ задачъ есть слѣдующій:

Два тѣла, находящіяся на разстояніи d линейныхъ единицъ, движутся другъ другу навстрѣчу: первое со скоростью v_1 линейныхъ единицъ въ единицу времени, а второе v_2 линейныхъ единицъ въ ту же единицу времени. Черезъ сколько единицъ времени они встрѣтятся?

Общее же рѣшеніе для нихъ, если мы искомое число обозначимъ черезъ x, будетъ слѣдующее:

$$x = d:(v_1 + v_2).$$

Наконецъ, алгебра даетъ намъ общіе способы для рѣшенія всевозможныхъ ариѳметическихъ задачъ. (См. уравненія.)

§ **5. Дѣйствія, разсматриваемыя въ алгебрѣ.** Въ алгебрѣ разсматривается шесть дѣйствій: первыя четыре тѣ же, что и въ ариѳметикѣ, т.-е. *сложеніе, вычитаніе, умноженіе* и *дѣленіе*, и кромѣ того, *возвышеніе въ степень* и *извлеченіе корней.*

Для обозначенія первыхъ четырехъ дѣйствій употребляются тѣ же знаки, что и въ ариѳметикѣ, т.-е. для обозначенія сложенія знакъ $+$ (плюсъ), $a+b$; для вычитанія — (минусъ), $a-b$; для умноженія знаки $\times$ или . (косой крестъ или точка), $a\times b$ или $a\,.\,b$; для дѣленія : или — (двѣ точки или черта), $a:b$ или $\frac{a}{b}$.

Относительно умноженія надо замѣтить, что знакъ этого дѣйствія почти всегда **не пишется,** а подразумѣвается. Пишутъ обыкновенно тѣ буквенныя количества, которыя надобно перемножить, рядомъ, безъ всякаго знака; такъ напр., вмѣсто $a\times b\times c$ или $a\,.\,b\,.\,c$ пишутъ abc. Очевидно, что съ цифрами этого сдѣлать нельзя, потому что значеніе каждой цифры зависитъ отъ занимаемаго ею мѣста. Нельзя, напр., сказать, что $5\,.\,6=56$.

§ **6. Коэффиціентъ.** Буквенныя количества, входящія въ составъ какого-нибудь произведенія, называются множителями, или производителями. Такъ, въ произведеніи: abc количества: a, b и c суть множители или производители.

Если въ произведеніи одинъ изъ множителей численный, то онъ обыкновенно ставится впереди буквенныхъ множителей и называется *коэффиціентомъ.* Такъ, въ произведеніи $5abc$ число 5 есть коэффиціентъ. Точно такъ же въ произведеніи $\frac{3}{8}xy$ число $\frac{3}{8}$ — коэффиціентъ.

Если коэффиціентъ выраженъ цѣлымъ числомъ, то онъ обозначаетъ, что извѣстное произведеніе взято слагаемымъ или вычитаемымъ нѣсколько разъ. Такъ, въ произведеніи $5abc$ число 5 обозначаетъ, что abc взято слагаемымъ 5 разъ, т.-е. $5abc = abc\,.\,5 = abc+abc+abc+abc+abc$.

Въ выраженіи же: $a-2ab$ коэф. 2 означаетъ, что произведеніе ab взято вычитаемымъ два раза; поэтому, это выраженіе можно замѣнить слѣдующимъ: $a-ab-ab$.

Дробный коэффиціентъ показываетъ, какая часть берется отъ произведенія. Такъ, въ произведеніи $\frac{3}{8}xy$ коэф. означаетъ, что отъ произведенія xy надо взять $\frac{3}{8}$ части.

Если при какомъ-нибудь произведеніи нѣтъ коэффиціента, то надо подразумѣвать единицу; такъ, $ab=1ab$.

§ 7. **Степень.** Иногда произведеніе составляется изъ одного и того же количества, взятаго множителемъ нѣсколько разъ. Такое произведеніе пишется сокращеннымъ образомъ, а именно: количество, повторяющееся нѣсколько разъ множителемъ, пишутъ только одинъ разъ, а надъ нимъ справа ставятъ число, которое показываетъ, сколько разъ данное количество должно быть взято множителемъ. Такъ, вмѣсто 4 . 4 . 4 пишутъ 4^3; вмѣсто $xxxxx$ пишутъ x^5; вмѣсто $aaaaa \ldots$, повторяющееся множителемъ n разъ, пишутъ a^n.

Произведеніе, составленное изъ одинаковыхъ множителей, называется степенью; количество, которое берется множителемъ, называется *основаніемъ степени;* а число, показывающее, сколько разъ повторяется множитель, называется *показателемъ степени.* Такъ, въ выраженіи 4^3 число 4 есть основаніе степени, число 3 — показатель степени, а самое произведеніе $4^3 = 64$ есть степень.

По числу одинаковыхъ множителей, входящихъ въ составъ произведенія, или, иначе, по величинѣ показателя, степени дѣлятся на вторыя — a^2, третьи — a^3, четвертыя — a^4 и т. д. Вторая степень часто называется *квадратомъ*, а третья — *кубомъ.* Всякое число, взятое само по себѣ, называется *первой степенью.* Напр., a есть первая степень для a, и ее можно изобразить такъ: $a = a^1$, хотя обыкновенно показателя первой степени не пишутъ.

Дѣйствіе, состоящее въ умноженіи числа самого на себя нѣсколько разъ, называется *возвышеніемъ въ степень.* Такъ, возвысить 5 въ четвертую степень значитъ составить произведеніе изъ числа 5, повторивъ его множителемъ 4 раза; получимъ $5^4 = 5 . 5 . 5 . 5 = 625$.

Примѣчаніе. Изъ сказаннаго видно, что нельзя смѣшивать коэффиціента съ показателемъ степени, потому что первый показываетъ, сколько разъ извѣстное количество берется слагаемымъ или вычитаемымъ, а второй показываетъ, сколько разъ оно берется множителемъ. Напр., $4x = x + x + x + x$, а $x^4 = xxxx$.

§ 8. **Корень.** Основаніе какой-либо степени называется часто *корнемъ* для того числа, которое получается послѣ возвышенія. Такъ, 3 есть корень четвертой степени для 81, потому что $3^4 = 81$; точно такъ же $\frac{2}{5}$ есть квадратный корень для $\frac{4}{25}$, потому что $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.

Дѣйствіе, помощью котораго находится корень какой-либо степени для даннаго числа, называется *извлеченіемъ корня*. Для обозначенія этого дѣйствія употребляется особый знакъ $\sqrt{\ }$, который называется *радикаломъ* (этотъ знакъ есть не что иное, какъ испорченная латинская буква *r*, отъ слова *radix* = *корень*). Съ правой стороны подъ чертою этого знака пишутъ то число, изъ котораго надо извлечь корень; а вверху этого знака пишутъ число, показывающее, какой степени надо извлечь корень; число это называется *показателемъ корня*. Такъ, чтобы показать, что изъ 81 надо извлечь корень 4-й степени, пишутъ такъ: $\sqrt[4]{81}$; точно такъ же, чтобы изобразить, что изъ $\frac{9}{64}$ надо извлечь квадратный корень, пишутъ такъ: $\sqrt[2]{\frac{9}{64}}$. Замѣтимъ при этомъ, что показатель квадратнаго корня не пишется, а подразумѣвается. Поэтому, вмѣсто $\sqrt[2]{\frac{9}{64}}$, пишутъ $\sqrt{\frac{9}{64}}$; вмѣсто $\sqrt[2]{a}$, пишутъ $\sqrt{a}$. Показатели же остальныхъ степеней всегда пишутся.

Число, стоящее подъ радикаломъ, называется *подкореннымъ*, или *подрадикальнымъ*. Таковы, напримѣръ, числа въ предыдущихъ примѣрахъ: 81, $\frac{9}{64}$, a.

Задачи. 1. Въ одномъ городѣ находится a человѣкъ, а въ другомъ b. Сколько въ обоихъ вмѣстѣ?

Рѣшить эту задачу, если

$$a = 1728,\ 35446,\ 57364.$$
$$b = 4920,\ 13763,\ 38000.$$

2. Въ фруктовомъ саду a грушъ, b яблонь, c сливъ и d вишенъ. Сколько всѣхъ деревьевъ въ саду?

Рѣшить эту задачу при $a = 240$, $b = 320$, $c = 520$, $d = 117$.

3. Въ амбарѣ a четвериковъ ржи, m четвериковъ овса, n четвериковъ пшеницы, и p четвериковъ ячменя. Сколько всего хлѣба въ амбарѣ?

Рѣшить эту задачу при $a = 1345$, $m = 3725$, $n = 367$, $p = 1542$.

4. Купленъ товаръ за a рублей, а проданъ за b рублей. Сколько получено прибыли?

Рѣшить эту задачу при $a = 649$, $b = 827$.

5. Въ арміи находилось a человѣкъ; во время сраженія было убито b человѣкъ, ранено c человѣкъ, взято въ плѣнъ d человѣкъ. Сколько солдатъ осталось въ арміи послѣ сраженія?

Рѣшить эту задачу при $a = 40000$, $b = 127$, $c = 3618$, $d = 500$.

6. Въ хлѣбномъ магазинѣ было s четвертей хлѣба; при чемъ ржи было m четвертей, пшеницы n четвертей и ячменя p четвертей, остальное же былъ овесъ. Сколько четвертей было овса въ магазинѣ?

Рѣшить эту задачу при $s = 3500$, $m = 650$, $n = 270$, $p = 725$.

7. Фунтъ чаю стоитъ a рублей; сколько стоятъ m фунтовъ? Рѣшить эту задачу при $a=2$; 1,5; 3,25; $m=32$; 18; $7\frac{1}{2}$.

8. Въ книгѣ a страницъ, на каждой страницѣ по b строкъ, въ строкѣ по c буквъ. Сколько буквъ въ книгѣ?

Рѣшить задачу при $a=160$, $b=38$, $c=48$.

9. Помѣщикъ продалъ a четвертей пшеницы по m рублей за четверть и участокъ лѣса за b рублей. Сколько у него осталось денегъ, если онъ на уплату дома отдалъ k рублей?

Рѣшить эту задачу при $a=1340$, $m=8$, $b=12000$, $k=19346$.

10. a рабочихъ получили за работу m рублей; сколько получилъ каждый?

Рѣшить эту задачу при $a = 133$, $m = 1596$.

11. Пароходъ, содержавшій a пудовъ муки, разгрузили въ n дней c рабочихъ. Сколько пудовъ выгружалъ ежедневно каждый рабочій?

Рѣшить эту задачу при $a=86400$, $n=10$, $c=24$.

---

12. Написать сумму чиселъ a, b, c и d.

13. Написать разность между числами a и x.

14. Написать произведеніе и частное чиселъ m и n.

15. Куплено a аршинъ полотна по a рублей за аршинъ. Сколько заплачено за все сукно?

Рѣшить эту задачу при $a=2,7$.

16. Чему равенъ объемъ куба, ребро котораго равно k футамъ? Рѣшить задачу при $k=17,3(72)$.

17. Сколько фунтовъ въ a пудахъ?

18. Раздробить въ аршины r верстъ?

19. Сколько лотовъ въ a фунтахъ и b лотахъ?

20. Сколько саженъ въ n футахъ?

21. Сколько пудовъ въ a лотахъ?

Упростить выраженія:

22. $a+a+a+a$.

23. $abc+abc+xy+xy+xy$.

24. $ab+ab-cd-cd-cd$.

25. $abx-x-x+bc+bc$.

26. $\frac{ab}{4}+\frac{ab}{4}+\frac{ab}{4}$.

27. $\frac{x}{9}+\frac{x}{9}+\frac{x}{9}+\frac{x}{9}$.

28. $\frac{a}{5}+\frac{a}{5}-\frac{b}{4}-\frac{b}{4}-\frac{b}{4}$.

29. $\frac{xy}{7}+\frac{xy}{7}-\frac{zx}{3}-\frac{zx}{3}$.

Написать безъ коэффиціента слѣдующія выраженія:

30. $3ab$.

31. $4xyz$.

32. $4abc+3xy$.

33. $3ab-2cd$.

34. $2m-3nx$.

35. $7xyz+8abc$.

Упростить выраженія:

36. $a.a.a.a.a.$

37. $x.x.x.x.x.x.x.$

38. $a.a.b.b.b.$

39. $x.x.y.y.y.y.y.y.z.z.z.$

40. $5.a.a.b.b.b.c.$

41. $12.x.x.x.y.y.z.z.z.z.$

42. $6.a.a.b.b.b+4.a.a.a.b.b.$

43. $9x.y.y.y-5x.x.x.y.$

44. $7.a.b.b.b-4.a.a.b.b+5.a.a.a.b.$

Выразить безъ показателей степени:

45. $a^2.$

46. $b^3.$

47. $a^2b^3.$

48. $x^5y^7.$

49. $3a^2b^3-4a^3b^2.$

50. $2a^2x+3ab^2-4b^2x.$

51. $16a^3b^4x^3-12b^3x^5y^2.$

52. $8x^7-9y^6-7z^5.$

Выразить безъ коэффиціентовъ и показателей:

53. $3a^2.$

54. $4a^3.$

55. $7a^3.$

56. $2a^3b^2.$

57. $3a^2b+4ab^2.$

58. $7ax^6-3bx^3.$

Вычислить корни:

59. $\sqrt{81}.$

60. $\sqrt[3]{27}.$

61. $\sqrt[5]{32}.$

62. $\sqrt[3]{125}.$

63. $\sqrt{\frac{25}{36}}.$

64. $\sqrt[3]{\frac{8}{64}}.$

65. Написать сумму квадратовъ для чиселъ a и b.

66. Написать разность квадратовъ для чиселъ a и b.

---

67. Написать число, содержащее a десятковъ и b единицъ.

68. Написать число, содержащее a тысячъ, b сотенъ, c десятковъ и x единицъ.

69. Написать общій видъ четнаго числа.

70. Написать общій видъ нечетнаго числа.

71. Дано число p; найти ближайшее предыдущее и ближайшее послѣдующее число.

72. Дано четное число m; найти ближайшія предыдущія четныя числа.

73. Смѣшано m фунтовъ чаю по a рублей и m_1 фунтовъ по b рублей за фунтъ; что стоитъ фунтъ смѣси?

74. Смѣшано 4 сорта муки; n_1 фунт. по a коп., n_2 фунтовъ по b коп., n_3 фунтовъ по c коп. и n_4 фунтовъ по d коп. за фунтъ. Что стоитъ фунтъ смѣси?

75. Торговецъ купилъ партію сахара по a руб. пудъ; онъ продалъ m пудовъ съ прибылью 20%; сколько онъ получилъ денегъ за проданный сахаръ?

76. n человѣкъ, работая ежедневно по a часовъ, получили въ b дней s рублей; во сколько дней n_1 человѣкъ получатъ s_1 рублей, работая по a_1 часовъ?

77. Если быть каждый день въ дорогѣ a часовъ, то можно проѣхать на почтовыхъ n верстъ въ b дней; сколько верстъ можно проѣхать по желѣзной дорогѣ въ b_1 дней, останавливаясь ежедневно c часовъ, если ѣзда по желѣзной дорогѣ въ $4\frac{1}{2}$ раза скорѣе?

78. Въ бассейнъ проведены 3 трубы; черезъ первыя двѣ вода вливается, а черезъ послѣднюю вытекаетъ; черезъ I-ю трубу бассейнъ наполняется въ m часовъ, черезъ вторую въ n часовъ; черезъ 3-ю бассейнъ можетъ опорожниться въ p часовъ. Во сколько времени наполнится пустой бассейнъ, если открыть сразу всѣ трубы?

79. Въ бассейнъ, вмѣстимостью въ a бочекъ, проведены двѣ трубы; черезъ одну въ m часовъ выливается b бочекъ, а черезъ другую въ n часовъ вливается c бочекъ. Во сколько часовъ наполнится бассейнъ, если открыть всѣ трубы?

80. Три работника, нанятые на одинаковыхъ условіяхъ, получили s рублей. Сколько получилъ каждый изъ нихъ, если первый работалъ a дней, второй b дней и третій c дней?

ГЛАВА II.

Объ алгебраическихъ выраженіяхъ.

§ 9. **Алгебраическія выраженія.** *Всякое соединеніе чиселъ, изображенныхъ буквами, посредствомъ различныхъ знаковъ дѣйствій, называется алгебраическимъ выраженіемъ.* Таковы, напр.:

$$1)\ 4abc,\quad 2)\ \frac{3a}{abc},\ 3)\ \sqrt[5]{a},\quad 4)\ 2a^2-3bc+4c^2.$$

Алгебраическія выраженія бываютъ *одночленныя* и *многочленныя.*

Одночленными выраженіями, или одночленами, называются такія выраженія, которыя не содержатъ въ себѣ ни знака сложенія, ни знака вычитанія. Таковы, напр., выраженія:

$$1)\ 2a,\quad 2)\ \frac{a^2c}{4xn},\quad 3)\ \sqrt[3]{\frac{abc}{nh^2}},$$

Многочленными же выраженіями называются такія, которыя состоятъ изъ двухъ или болѣе одночленовъ, соединенныхъ между собою знаками + или —. Таковы, напр., выраженія:

$$1)\ a+b;\quad 2)\ 3a^2b-2cd^2+6xy^2;\qquad 3)\ \sqrt{ab}-\frac{3a^2b}{cg}+15a-x.$$

Одночлены, изъ которыхъ состоитъ многочленное выраженіе, называются членами его. Такъ, въ первомъ примѣрѣ члены суть: a и b; во второмъ примѣрѣ члены: $3a^2b$, $2cd^2$ и $6xy^2$.

По числу членовъ многочленныя выраженія дѣлятся на *двучлены* (или биномы), *трехчлены* (или триномы) и *многочлены* (или полиномы).

§ **10. Выраженія цѣлыя и дробныя.** Если алгебраическое выраженіе не содержитъ въ себѣ буквенныхъ дѣлителей, то оно называется *цѣлымъ*. Напримѣръ:

$$1)\ 5a^2bx,\quad 2)\ \tfrac{2}{3}ax^2,\quad 3)\ 4ab^2-\frac{a^2b}{2}+0{,}4a^3.$$

Если же въ составъ его входятъ буквенные дѣлители, то оно называется *дробнымъ*. Напр.:

$$1)\ \frac{a}{b},\quad 2)\ \frac{3ac}{2b},\quad 3)\ \frac{5ab}{n}-4\frac{ab^2}{cd}-x.$$

§ **11. Выраженія раціональныя и ирраціональныя.** Раціональными выраженіями называются такія, которыя не содержатъ знака *радикала* — $\sqrt{\ }$; напримѣръ:

$$3a^2b \text{ или } 6a^2-3ax+\frac{4a^2m}{x}.$$

Если же радикалъ входитъ въ составъ какого-либо выраженія, то оно называется *ирраціональнымъ;* напримѣръ:

$$\sqrt{a},\quad 3ab-\frac{a\sqrt{bc}}{c}.$$

§ **12. Числовое значеніе алгебраическихъ выраженій.** Если мы въ алгебраическомъ выраженіи замѣнимъ буквы числами и выполнимъ указанныя дѣйствія, то результатъ, который получится, называется *числовымъ значеніемъ алгебраическаго выраженія*. Такъ, напр., если мы въ выраженіи:

$$\frac{ab}{c}$$

вмѣсто a поставимъ 2, вмѣсто b—12, вмѣсто c—9, то получимъ $\frac{2\cdot12}{9}=2\frac{2}{3}$. Число $2\frac{2}{3}$ и называется числовымъ значеніемъ для выраженія $\frac{ab}{c}$.

Точно такъ же числовое значеніе для выраженія $a+b-c$, при $a=2$, $b=12$, $c=9$, будетъ $2+12-9=5$.

Укажемъ, въ какомъ порядкѣ должны производиться дѣйствія при нахожденіи числового значенія алгебраическихъ выраженій.

I. Въ одночленахъ прежде всего, если есть степени или корни, возвышаются числа въ степень, или извлекаются изъ нихъ корни, а затѣмъ производится умноженіе и дѣленіе.

Такъ, если намъ надо найти числовое значеніе выраженія

$$a^3b\sqrt{c}$$

при $a=3$, $b=\frac{3}{4}$, $c=16$, то прежде всего мы должны 3 возвысить въ 3-ю степень, затѣмъ изъ 16 извлечь квадратный корень и наконецъ полученные множители: 27, $\frac{3}{4}$ и 4 перемножить.

$$a^3b\sqrt{c}=3^3\cdot\frac{3}{4}\cdot\sqrt{16}=27\cdot\frac{3}{4}\cdot 4=81.$$

II. Въ многочленахъ прежде всего вычисляются члены по вышеуказаннымъ правиламъ и затѣмъ производится сложеніе или вычитаніе числовыхъ значеній членовъ. Напр.: найти числовую величину многочлена: $3a^2b-4ab^2+\frac{3b^3}{a^2}$ при $a=16$, $b=8$.

Рѣшеніе: $3a^2b=3\cdot16^2\cdot8=3\cdot256\cdot8=6144.$
$4ab^2=4\cdot16\cdot8^2=4\cdot16\cdot64=4096.$
$\frac{3b^3}{a^2}=\frac{3\cdot8^3}{16^2}=\frac{3\cdot512}{256}=6.$

Отвѣтъ: $3a^2b-4ab^2+\frac{3b^3}{a^2}=6144-4096+6=2054.$

§ 13. **Скобки.** *Скобками* называются особые знаки: ( ), [ ] и { }, между которыми ставятся алгебраическія выраженія, преимущественно многочлены, если требуется показать, что съ послѣдними надо произвести какое-нибудь дѣйствіе. Такъ, если бы намъ пришлось показать, что многочленъ a^2-ab+b^2 надо придать къ количеству a, или отнять отъ этого количества, а также помножить или раздѣлить его на это количество, то это слѣдуетъ изобразить такъ:

1) сложеніе . . . . . $a+(a^2-ab+b^2)$,
2) вычитаніе . . . . . $a-(a^2-ab+b^2)$,
3) умноженіе . . . . . $(a^2-ab+b^2)a$,
4) дѣленіе . . . . . . $(a^2-ab+b^2):a$.

Точно такъ же заключается многочленъ въ скобки, если требуется его возвысить въ какую-либо степень или извлечь изъ него корень; напр.:

$$1)\ (a^2-ab+b^2)^4,\quad 2)\ \sqrt[3]{(a^2-ab+b^2)}.$$

Впрочемъ, иногда скобки замѣняются чертою, а именно: 1) *при дѣленіи многочленовъ*, когда частное пишутъ въ видѣ дроби, при чемъ дѣлимое ставится надъ чертою, а дѣлитель подъ чертою. Такъ, вмѣсто выраженія $(a^2+b^2):(a-b)$ пишутъ:

$$\frac{a^2+b^2}{a-b}.$$

2) *При извлеченіи изъ многочленовъ корней.* Тогда надъ всѣмъ многочленомъ ставится черта, которая имѣетъ одинаковое значеніе со скобками. Такъ, вмѣсто выраженія

$$\sqrt[3]{(a^2-ab+b^2)} \text{ пишутъ } \sqrt[3]{\overline{a^2-ab+b^2}}.$$

Въ одночленахъ скобки употребляются при дѣленіи, когда частное не записывается въ видѣ дроби; напримѣръ: $(3a^2b):(4xy)$.

Кромѣ того, при возвышеніи одночленовъ въ какую-либо степень. Такъ, напр.: $(ab)^4$; $\left(\frac{a}{b}\right)^m$. Замѣтимъ при этомъ, что выраженіе $(ab)^4$ нельзя смѣшивать съ выраженіемъ ab^4: первое изъ нихъ показываетъ, что надо все произведеніе ab возвысить въ четвертую степень, а второе показываетъ, что въ четвертую степень возводится только множитель b. Точно такъ же

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \text{ не равно } \frac{a^m}{b}.$$

Всякій многочленъ, заключенный въ скобки, можно разсматривать, какъ одночленъ.

§ **14. Тождественныя выраженія.** Два алгебраическихъ выраженія называются *тождественными*, если числовыя значенія ихъ при замѣнѣ одинаковыхъ буквъ какими угодно числами остаются равными. Таковы, напр., выраженія:

1) $5ab$ и $3ab+2ab$.

2) $\frac{ax}{b}$ и $\frac{a}{b}\times x$.

§ **15. Понятіе о формулѣ.** Одно алгебраическое выраженіе можетъ быть равно другому, можетъ быть больше другого и наконецъ можетъ быть меньше его. Зависимость эта между выраженіями обозначается въ первомъ случаѣ знакомъ $=$ (знакомъ равенства), напр.: $3ab=4cd$; во второмъ случаѣ знакомъ $>$, напр.: $a>b$; и въ третьемъ случаѣ знакомъ $<$, напр.: $a<b$; послѣдніе два знака называются *знаками неравенства.*

Два алгебраическія выраженія, соединенныя знакомъ равенства или неравенства, называются формулою; — при чемъ формула со знакомъ равенства называется *равенствомъ*, напр.: $a+b=c-d$ *или* $5ab=3ab+2ab$; формула же со знакомъ неравенства называется — *неравенствомъ*, напр.: $3ab>4ac$ или $7a<3b$.

Въ каждой формулѣ выраженіе, написанное впереди знака равенства или неравенства, называется *первой частью* ея, а выраженіе, написанное послѣ этихъ знаковъ, называется *второю частью*

формулы. Такъ, напр., въ формулѣ $3ab = 4a^2 - b^2$ выраженіе: $3ab$ есть первая часть, а выраженіе: $4a^2 - b^2$ — вторая часть.

§ **16.** *Составить* формулу по условіямъ какого-либо вопроса значитъ выразить соотношеніе между числами, входящими въ составъ этого вопроса, при помощи знаковъ дѣйствій и знаковъ равенства или неравенства. Напримѣръ:

1) *Выразить, что сумма крайнихъ членовъ ариѳметической пропорціи равна суммѣ среднихъ.*

Обозначивъ первый членъ черезъ a, второй черезъ b, третій черезъ c и четвертый черезъ d, пишемъ равенство: $a + d = b + c$.

2) *Выразить, что произведеніе двухъ чиселъ больше ихъ суммы.*

Обозначивъ первое число черезъ a и второе черезъ b, пишемъ неравенство: $ab > a + b$.

Задачи. Найти числовыя значенія выраженій:

81. $3a^3b^2$ при $a = 2$, $b = 3$.
82. $\frac{7a^3bx^2}{4mn}$ при $a = 1$, $b = 2$, $x = 4$, $m = 7$, $n = 2$.
83. $a^2 + ab - b^2$ при $a = 4$, $b = 5$.
84. $a^3 - b^3$ при $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$.
85. $a^2 - 2ab + b^2$ при $a = 4$, $b = 1$.
86. $a^2 + 2a^2 - 3a + 1$ при $a = 1$.
87. $a^3 - 3a^2 + 4a + 2$ при $a = 3$.
88. $a^3 + 8a^2 - 3a + 5$ при $a = \frac{1}{2}$.
89. $a^3 - 5a^2 + 4a - 40$ при $a = 6$.
90. $a^3 + 6a^2 - 2a + 12$ при $a = \frac{1}{3}$.
91. $a^3 - 7a^2 - 4a - 200$ при $a = 10$.
92. $x^4 + 3x^2 - 25$ при $x = 2$.
93. $x^3 - 2x^2 - x + 7$ при $x = 4$.
94. $x^6 - 3x^3 + 1$ при $x = 2$.
95. $3a^3 - 2a^2b + ab^2 - 6$ при $a = 3$, $b = 2$.
96. $7a^3 + 4a^2x - 3ax^2 - x^3$ при $a = 2$, $x = 3$.
97. $4x^3 - 5x^2y - 6xy^2 - 7y^3$ при $x = 3$, $y = 1$.
98. $a^5 - a^4 + a^3 - a^2 + a - 1$ при $a = 2$.
99. $(xy)^{2n} - 4(xy)^n + 4$ при $x = \frac{1}{2}$, $y = 3\frac{1}{2}$, $n = 3$.
100. $(a^2 + b)a - ab$ при $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$.
101. $[(a^2 - 2)a - 3a]a$ при $a = 3$.
102. $[(a^2 + 2)a - 5a]a$ при $a = 3$.
103. $(a - x)(a + x)(a^2 + x^2)$ при $a = 6$, $x = 5$.
104. $(9 + a^2)(3 + a)(3 - a)$ при $a = 1$.
105. $(9 - a^2)(3 + a)(3 - a)$ при $a = 1$.
106. $(3a^2b + 5ab^2)(3a^2b - 5ab^2)$ при $a = 2$, $b = 1$.
107. $(5x^4 - 6y)(5x^4 + 6y)$ при $x = 2$, $y = 13$.
108. $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$ при $x = 2$.
109. $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$ при $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$.

110. $\frac{x^2+xy}{x^2-xy}$ при $x=0{,}5$, $y=0{,}3$.

111. $\frac{6x-6}{7x-7}$ при $x=5$.

112. $\frac{xa-x}{ax+x}$ при $a=2$, $x=0{,}25$.

113. $\frac{a^2-4a+4}{a^2-5a+6}$ при $a=5$.

114. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ при $x=3$.

115. $\frac{a^2bc-b^3c+2b^2c^2-bc^3}{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$ при $a=4$, $b=3$, $c=2$.

116. $\frac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2-c^2+2bc}$ при $a=4$, $b=1$, $c=2$.

117. $\frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz}{x^2-y^2-z^2-2yz}$ при $x=5$, $y=2$, $z=1$.

118. $\frac{5x^3-13x^2+10x-8}{7x^3+10x^2-8}$ при $x=4$.

119. $\frac{6x^3-4}{x^2-x+1}+\frac{x^2-x+1}{1+x-x^2}$ при $x=1$.

120. $\frac{1+x-x^2}{x^2-x+1}+\frac{6x^3+2}{x^2-x+1}$ при $x=1$.

Составить формулы по слѣдующимъ условіямъ:

121. Сумма двухъ чиселъ a и b равна числу x.
122. Разность чиселъ m и n больше на p количества x.
123. Произведеніе чиселъ a и b равно суммѣ этихъ чиселъ.
124. Число a больше b на c.
125. Число a больше b въ m разъ.
126. Число a меньше b въ n разъ.
127. Произведеніе чиселъ a и b равно разности чиселъ c и d.

128. Частное отъ дѣленія a на b въ 7 разъ больше произведенія двухъ чиселъ x и y.

129. a аршинъ одного сукна стоятъ m рублей, а b аршинъ другого сукна n рублей. Выразить, на сколько рублей аршинъ перваго сукна дороже аршина второго.

130. Путешественникъ проѣхалъ d верстъ въ a дней; сколько верстъ проѣзжалъ онъ ежедневно?

131. Имѣемъ число, содержащее a десятковъ и b единицъ. Если къ этому числу придадимъ m, то получимъ число, означенное тѣми же цифрами, но въ обратномъ порядкѣ.

132. Имѣемъ число, содержащее a сотенъ, b десятковъ, c единицъ. Если отъ этого числа отнимемъ m, то получимъ число, обозначенное тѣми же цифрами, но въ обратномъ порядкѣ.

133. Имѣемъ дробь, числитель которой a, а знаменатель b; если къ числителю этой дроби придадимъ m, то получимъ обратную дробь.

134. Имѣемъ дробь $\frac{x}{y}$; если отъ знаменателя этой дроби отнимемъ d, то получимъ обратную дробь.

135. Если въ дроби $\frac{m}{n}$ числителя раздѣлить на a, то получимъ обратную дробь.

136. Имѣемъ дробь $\frac{a}{b}$; уменьшивъ числителя ея въ m разъ и увеличивъ знаменателя въ n разъ, получимъ обратную дробь.

137. Сумма двухъ чиселъ a и b больше ихъ разности.

138. Произведеніе двухъ чиселъ a и b больше ихъ частнаго.

139. Частное двухъ чиселъ m и n больше суммы чиселъ a, b и c.

140. Произведеніе чиселъ a и b меньше разности чиселъ c и d.

141. Сумма двухъ чиселъ a и b меньше суммы квадратовъ этихъ чиселъ.

142. Произведеніе чиселъ a, b, c и d меньше суммы ихъ кубовъ.

Составить задачи, рѣшенія которыхъ соотвѣтствуютъ формуламъ:

143. $x = a + b$.

144. $x = a - b$.

145. $x = a + b - c$.

146. $x = am$.

147. $x = am - bn$.

148. $x = ar - bk - l$.

149. $x = \frac{a-b}{c}$.

150. $x = \frac{mb + m_1b_1 + m_2b_2}{m + m_1 + m_2}$.

Провѣрить справедливость формулъ:

151. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ при $a = 5$, $b = \frac{1}{2}$.

152. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ при $a = 3$, $b = 1$.

153. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ при $a = 6$, $b = 3$.

154. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ при $a = 0{,}02$, $b = 0{,}05$.

155. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ при $a = 3{,}6$, $b = 1{,}2$.

156. $\frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a^2 - 2ab + b^2} = a - b$ при $a = 6$, $b = 2$.

ГЛАВА III.

О положительныхъ и отрицательныхъ количествахъ.

§ **17**. **Положительныя и отрицательныя числа.** Обозначая числа буквами, мы на первыхъ же шагахъ наталкиваемся на одно весьма значительное затрудненіе, а именно: возьмемъ выраженіе:

$$a - b.$$

Если въ этомъ выраженіи a больше b или равно ему, то у насъ получится въ результатѣ нѣкоторое число, бо́льшее нуля,

или нуль. Но что будетъ означать это выраженіе въ томъ случаѣ, если a меньше b? Положимъ, $a=5$, а $b=9$; какой смыслъ имѣетъ выраженіе 5—9?

Очевидно, что 9 нельзя вычесть изъ 5, потому что 9 больше 5; слѣдовательно, выраженіе 5—9, по существу, невозможное. Однако, въ алгебрѣ вычитаніе бо́льшихъ чиселъ изъ меньшихъ допускается; условились разность обозначать такъ: дѣлаютъ вычитаніе наоборотъ, т.-е. отъ вычитаемаго отнимаютъ уменьшаемое и полученную разность ставятъ со знакомъ — (минусъ). Поэтому $5-9=-4$; точно такъ же $7-16=-9$, $\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}=\frac{3}{6}-2\frac{4}{6}=-2\frac{1}{6}$ и т. п. Полученныя числа со знакомъ минусъ, напр.: —4, —9, $-2\frac{1}{6}$ и т. п. называются **отрицательными.** Обыкновенныя же числа называются **положительными:** передъ ними иногда ставится знакъ +, напр.: +6, $+3\frac{1}{2}$ и т. п. *Положительныя и отрицательныя числа, безразлично, называются алгебраическими количествами.*

Число единицъ всякаго количества, положительнаго или отрицательнаго, взятое независимо отъ знака, называется *абсолютною величиною* этого количества. Такъ, напр.: 7 есть абсолютная величина для количествъ: +7 и —7; точно такъ же $5\frac{1}{2}$ есть абсолютная величина для $+5\frac{1}{2}$ и $-5\frac{1}{2}$.

Такимъ образомъ въ алгебрѣ разсматриваются два ряда чиселъ: одинъ рядъ отъ нуля до безконечности:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \ldots\ldots$$

положительный, а другой рядъ отъ нуля до безконечности:

$$0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5\ \ldots\ldots$$

отрицательный. Этимъ алгебра существенно отличается отъ ариѳметики, въ которой разсматривается одинъ только такъ называемый натуральный рядъ чиселъ.

§ 18. **Значеніе отрицательныхъ чиселъ.** Отрицательныя числа сами по себѣ не имѣютъ никакого смысла. Такъ, нельзя сказать, что въ комнатѣ есть минусъ пять стульевъ, или что нѣкто жилъ минусъ 20 лѣтъ. Они, отрицательныя числа, имѣютъ чисто условное значеніе и всегда показываютъ, что при вычитаніи нѣкоторыхъ двухъ чиселъ вычитаемое было больше уменьшаемаго на извѣстное число единицъ. Введены же они въ алгебру для того, чтобы дать возможность изобразить разность двухъ чиселъ въ общемъ видѣ, т.-е. чтобы дать возможность записать выраженіе: $a-b$, гдѣ подъ a и b можно подразумѣвать какія

угодно числа. Это допущенiе сдѣлано потому, во-первыхъ, что дѣйствiя съ отрицательными числами, какъ мы увидимъ ниже, производятся по тѣмъ же правиламъ, какъ и съ положительными, и, во-вторыхъ, допуская отрицательныя числа, мы никогда не получимъ противорѣчащихъ результатовъ. (Другiя значенiя отрицательныхъ чиселъ указаны будутъ ниже).

§ 19. **Свойство положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ.** Изъ ариѳметики намъ извѣстно, что если мы уменьшаемое увеличимъ на нѣсколько единицъ, на столько же единицъ увеличится и разность. Возьмемъ теперь равенство 5—9=—4. Увеличивъ уменьшаемое на 3, получимъ 8—9=—1. Сравнивая двѣ разности: —4 и —1, мы видимъ, что вторая получилась изъ первой черезъ увеличенiе на 3 положительныхъ единицы. Что же сдѣлали эти 3 положительныя единицы? Онѣ уничтожили 3 отрицательныхъ единицы, такъ какъ прежде было 4 отрицательныхъ единицы, а теперь осталась только одна. Отсюда вытекаетъ, что *отъ присоединенiя нѣсколькихъ положительныхъ единицъ къ отрицательнымъ уничтожается столько послѣднихъ, сколько было первыхъ, — и наоборотъ.*

§ 20. Въ дѣйствительности есть много величинъ, которыя обладаютъ такимъ же свойствомъ, какъ положительныя и отрицательныя числа, т.-е. нѣсколько единицъ одной величины взаимно уничтожается столькими же единицами другой. Такiя величины называются *противоположными.* Примѣромъ противоположныхъ величинъ можетъ служить намъ: 1) имущество и долгъ; 20 рублей имущества уничтожается 20 рублями долга; 2) выигрышъ и проигрышъ, 3) прибыль и убытокъ, 4) движенiе впередъ и назадъ и т. п.

На основанiи ихъ свойствъ, каждую изъ двухъ противоположныхъ величинъ можно назвать однимъ именемъ. Такъ, имущество и долгъ можно назвать имуществомъ, при чемъ долгъ будетъ называться отрицательнымъ имуществомъ; наоборотъ, то и другое можно назвать долгомъ, при чемъ имущество будетъ называться отрицательнымъ долгомъ. Точно такъ же можно назвать проигрышъ отрицательнымъ выигрышемъ; убытокъ — отрицательною прибылью; движенiе назадъ — отрицательнымъ движенiемъ впередъ и т. п.

§ 21. Свойство противоположныхъ величинъ часто даетъ намъ возможность опредѣлить истинное значенiе полученнаго отрицательнаго результата. Возьмемъ задачу: *Нѣкто купилъ*

лошадь за **m** *рублей и продалъ ее за* **n** *рублей. Сколько получилъ онъ прибыли?*

Чтобы рѣшить эту задачу, надо изъ n вычесть m; получимъ выраженіе: $n-m$. Если $n < m$, то результатъ будетъ отрицательный. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $n=40$, а $m=65$, тогда $n-m=40-65=-25$, т.-е. за лошадь получено минусъ 25 рублей прибыли; это означаетъ, что за лошадь получено убытка 25 рублей.

Задачи. 157. Нѣкто имѣетъ a рублей; долгъ же его равенъ b рублямъ. Сколько у него останется денегъ по уплатѣ долга?

Какое значеніе имѣетъ отвѣтъ при $a=6000$, $b=3200$ и $a=6000$, $b=10000$?

158. Нѣкто долженъ p рублей, а наличныхъ денегъ имѣетъ q рублей. Сколько у него останется долга, если онъ употребитъ на плату его всѣ свои наличныя деньги?

Какое значеніе имѣетъ отвѣтъ при $p=720$ и $q=300$; $p=400$ и $q=560$?

159. Купецъ заплатилъ за товаръ m рублей, а продалъ его за n рублей. Сколько получилъ онъ прибыли?

Какое значеніе имѣетъ отвѣтъ, если $m=120$ и $n=150$: $m=600$ и $n=480$?

160. Купецъ заплатилъ за товаръ a рублей, а продалъ его за q рублей. Сколько получилъ онъ убытка?

Объяснить значеніе отвѣта при $a=648$, $q=326$ и $a=300$, $q=410$.

161. Чиновникъ получалъ въ годъ жалованья a рублей, а тратилъ r рублей. Сколько рублей онъ ежегодно сберегалъ?

Объяснить значеніе отвѣта при $a=720$, $r=600$ и $a=1200$, $r=1500$.

162. Нѣкто сѣлъ играть въ карты. Сначала онъ выигралъ c рублей, а потомъ проигралъ d руб. Сколько онъ выигралъ?

Какое значеніе имѣетъ отвѣтъ при $c=40$, $d=25$ и при $c=36$, $d=40$?

163. Нѣкто проигралъ въ теченіе вечера m рублей, а на другой день выигралъ n рублей. Сколько онъ всего проигралъ?

Какое значеніе имѣетъ отвѣтъ, если $m=120$ и $n=65$; $m=300$, $n=650$?

164. Гребецъ подвинулъ лодку на a аршинъ противъ теченія, а теченіе снесло ее назадъ на b аршинъ. На сколько аршинъ лодка подвинулась впередъ?

Объяснить значеніе отвѣта при $a=26$, $b=12$; $a=30$, $b=47$.

165. Воду нагрѣли на p градусовъ, а потомъ охладили ее на q градусовъ. На сколько градусовъ повысилась температура воды?

Объяснить значеніе отвѣта при $p=70$, $q=40$; $p=60$, $q=80$.

166. Въ бассейнъ влили сначала m ведеръ воды, а потомъ вылили изъ него n ведеръ. На сколько ведеръ увеличилось количество воды въ бассейнѣ?

Какое значеніе имѣетъ отвѣтъ при $m = 60$, $n = 40$ и $m = 25$, $n = 38$?

167. Въ одномъ городѣ родилось c человѣкъ, а умерло f человѣкъ. На сколько увеличилось населеніе города?

Какое значеніе имѣетъ отвѣтъ, если $c = 17000$, $f = 10000$, $c = 20000$, $f = 23000$?

168. Въ училище въ теченіе учебнаго года поступило m мальчиковъ, а выбыло n. На сколько за годъ уменьшилось общее число учениковъ?

Какое значеніе имѣетъ отвѣтъ, если $m = 45$, $n = 60$; $m = 28$, $n = 15$?

169. Какое значеніе имѣютъ выраженія: $-a$ руб. убытка, $-c$ руб. прибыли; $-m$ руб. выигрыша, $-n$ руб. проигрыша?

170. Какое значеніе имѣютъ выраженія: $-s$ руб. капитала, $-f$ руб. долга?

ГЛАВА IV.

Приведеніе.

§ 22. **Положительные и отрицательные члены многочлена.** Мы уже знаемъ (§ 9), что многочленами называются такія алгебраическія выраженія, которыя состоятъ изъ нѣсколькихъ одночленовъ, соединенныхъ между собою знакомъ $+$ или $-$. Члены каждаго многочлена обыкновенно разсматриваются съ тѣми знаками, которые стоятъ передъ ними, и тѣ изъ членовъ, передъ которыми стоитъ знакъ $+$, называются *положительными*, а тѣ, передъ которыми стоитъ знакъ $-$, называются *отрицательными*. Такъ, въ многочленѣ:

$$3a^2 - 4ab + 2b^2 - 3x^2$$

члены: $3a^2$ и $2b^2$ суть положительные, а остальные два — отрицательные.

§ 23. **Подобные члены.** *Члены многочлена называются подобными, если они или совершенно одинаковы, или различаются только коэффиціентами или знаками.* Такъ, напр., въ многочленѣ:

$$3a^2b - 4ac^3 + 3a^2b - 3ax^2 + 7ac^3$$

первый и третій членъ подобны, потому что они совершенно одинаковы; точно такъ же второй и пятый члены подобны, потому что они различаются только коэффиціентами и знаками; четвертый же членъ $-3ax^2$ не имѣетъ себѣ подобныхъ, потому

что онъ отличается отъ другихъ своими буквенными множителями.

§ 24. **Приведеніе подобныхъ членовъ.** Если въ многочленѣ встрѣчаются подобные члены, то его можно упростить, соединяя всѣ подобные члены въ одинъ. Такое упрощеніе многочленовъ называется *приведеніемъ* подобныхъ членовъ.

При приведеніи подобныхъ членовъ разсматривается два случая:

I случай, когда подобные члены имѣютъ одинаковые знаки. Возьмемъ многочленъ:

$$4a^2b - 3xy + 2a^2b + 3a^2b.$$

Въ этомъ многочленѣ первый, третій и послѣдній члены подобны; всѣ со знакомъ +. Этотъ знакъ показываетъ, что къ четыремъ какимъ-то величинамъ надо сначала прибавить двѣ, а потомъ еще три такихъ величины; всего, слѣдовательно, должно получиться 9 такихъ величинъ, или

$$4a^2b + 2a^2b + 3a^2b = 9a^2b.$$

Поэтому, многочленъ $4a^2b - 3xy + 2a^2b + 3a^2b$ можно замѣнить равнымъ, или тождественнымъ ему двучленомъ: $9a^2b - 3xy$, т.-е.

$$4a^2b - 3xy + 2a^2b + 3a^2b = 9a^2b - 3xy.$$

Возьмемъ другой многочленъ, въ которомъ подобные члены имѣли бы знакъ —, напр.: $4a^2 - 3ax^2 - 4ax^2 - 6ax^2$.

Въ этомъ многочленѣ отъ $4a^2$ надо постепенно отнять сперва три какія-то величины, потомъ четыре и наконецъ 6 такихъ величинъ. Вмѣсто того, чтобы отнимать отдѣльно каждую величину, можно отнять ихъ сумму, т.-е.

$$4a^2 - 3ax^2 - 4ax^2 - 6ax^2 = 4a^2 - (3ax^2 + 4ax^2 + 6ax^2).$$

Но $3ax^2 + 4ax^2 + 6ax^2 = 13ax^2$; слѣдовательно,

$$4a^2 - 3ax^2 - 4ax^2 - 6ax^2 = 4a^2 - 13ax^2.$$

Изъ этихъ примѣровъ мы можемъ вывести **правило:** *Чтобы сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ, имѣющихъ одинаковые знаки, надо коэффиціенты ихъ сложить и, не измѣняя буквеннаго выраженія, поставить передъ суммою тотъ же знакъ, какой имѣли члены до приведенія.*

Примѣръ: $-6x^3 + 3a^2b - 4x^3 - 9x^3 + 4a^2b - 3x^3 = -22x^3 + 7a^2b$.

II случай, когда подобные члены имѣютъ разные знаки.

Возьмемъ многочлены:

$$\text{I.}\quad 2a^2b + 9x^2y - 4x^2y.$$
$$\text{II.}\quad 2a^2b - 9x^2y + 4x^2y.$$

Въ первомъ изъ этихъ многочленовъ къ количеству $2a^2b$ надо сперва количество x^2y придать 9 разъ, а потомъ отнять его 4 раза, — а это все равно, если бы количество x^2y придали $(9-4)=5$ разъ. Слѣдовательно, вмѣсто членовъ $+9x^2y-4x^2y$ можно поставить одинъ членъ $+5x^2y$.

Во второмъ же изъ этихъ многочленовъ изъ количества $2a^2b$ надо сначала количество x^2y отнять 9 разъ, а потомъ придать его 4 раза, а это все равно, что вычесть послѣднее количество 5 разъ, т.-е. $-9x^2y+4x^2y=-5x^2y$.

Слѣдовательно,

$$\text{I.}\quad 2a^2b + 9x^2y - 4x^2y = 2a^2b + 5x^2y.$$
$$\text{II.}\quad 2a^2b - 9x^2y + 4x^2y = 2a^2b - 5x^2y.$$

Изъ этихъ примѣровъ мы можемъ вывести **правило**: *Чтобы соединить два подобные члена съ различными знаками въ одинъ, надо изъ бо́льшаго коэффиціента вычесть меньшій и, не измѣняя буквеннаго выраженія, передъ разностью поставить знакъ бо́льшаго коэффиціента.*

§ 25. Если многочленъ содержитъ нѣсколько подобныхъ членовъ съ различными знаками, то обыкновенно поступаютъ такъ: *сначала складываютъ коэффиціенты положительныхъ членовъ, потомъ отрицательныхъ, и наконецъ изъ полученнаго такимъ образомъ бо́льшаго коэффиціента вычитаютъ меньшій и въ результатъ ставятъ знакъ бо́льшей суммы.* Напр.:

$$7a^3 + 3x^2z - 4x^2z + 6x^2z - 10x^2z - 3x^2z.$$

Въ этомъ многочленѣ всѣ члены, кромѣ перваго, подобны такъ какъ здѣсь подобные члены имѣютъ различные знаки, то сначала мы сложимъ коэффиціенты положительныхъ членовъ: второго и четвертаго, получимъ: $+3x^2z+6x^2z=9x^2z$. Потомъ сложимъ коэф. отрицательныхъ членовъ; получимъ: $-4x^2z-10x^2z-3x^2z=-17x^2z$. Наконецъ изъ коэф. бо́льшей суммы вычтемъ коэф. меньшей, т.-е. изъ 17 вычтемъ 9, получимъ 8. Слѣдовательно, многочленъ:

$$7a^3 + 3x^2z - 4x^2z + 6x^2z - 10x^2z - 3x^2z = 7a^3 - 8x^2z.$$

Замѣтимъ при этомъ: если въ многочленѣ встрѣчаются подобные члены съ равными коэффиціентами, но съ различными знаками, то эти члены взаимно уничтожаются; поэтому они обык-

новенно зачеркиваются. Такъ, въ нашемъ многочленѣ второй и послѣдній члены можно зачеркнуть, потому что они взаимно другъ друга уничтожаютъ.

Задачи.

171. $3a^2b + 7a^2b.$
172. $15ab^2 + 16a^2b + 17ab^2.$
173. $20xy^2 + 12xy^2 + 13x^2y + 16x^2y.$
174. $26a^2 - 3xy^2 - 12xy^2.$
175. $14a^3 - ab^2 - 3ab^2 - 4ab^2.$
176. $10a^2 + 3a^2 + 4a^2 - 15b^3 - 10b^3 - 3b^3 + 16ab^2.$
177. $3(a+b)^2 + 4(a+b)^2 + 6(a+b)^2.$
178. $7(a-b)^3 + 2(a-b)^3 + 3(a-b)^3.$
179. $18a^2b - 3a^2b.$
180. $16ab^2 - 14ab^2 - ab^2.$
181. $18ab^2 + 13ab^2 + 10a^2b - 4ab^2 - 3a.$
182. $9a^3 - 4a^3 + 3a^3 - 9ab^2 - 6a^3.$
183. $16a^2 + 12ab - 13a^2 - 8a^2 + 8a^2 - 16ab.$
184. $16abx - 13a^2x - 14abx + 12a^2x - 19a^2x.$
185. $18x^m + 10y^n - 14x^m - 12x^m - y^n + y^m + 7x^m.$
186. $15a^m - 12a^m + 14a^n - 16a^m + 14a^n + 16a^m.$
187. $10(a-b) + 10(a+b) - 12(a-b) + 12(a+b) + 3(a-b).$
188. $12(x-y)^3 - 17(a+b)^3 + 14(a+b)^3 - 12(x-y)^3 + 10(x-y)^3.$
189. $(a+b)^3 - 3a(a+b)^2 + 4(a+b)^3 + 2a(a+b)^3.$
190. $18(x+z)^3 - 10(y-x)^3 + 14(x-z)^3 + 13(y-x)^3.$
191. $7a^2b - 11\frac{2}{3}a^2b + 3\frac{1}{2}a^2b - 2\frac{5}{6}a^2b.$
192. $\frac{5}{3}a^2bc - \frac{3}{4}abc^2 - \frac{3}{2}a^2bc - \frac{1}{2}abc^2 + abc^2 + 2\frac{1}{2}a^2bc.$
193. $5a^2 - 3ab + 3cd - d^2 - 5a^2 + 3ab + 7d^2 + 2a^2 - 5ab - 8cd +$
$+ d^2 - 3a^2 + 4ab + 7cd - 9d^2.$
194. $7x^3 - x^2y + u^3 - uv^2 + 4uv^2 - 8u^3 + 4x^2y - 5x^3 + 5x^2y - 2x^3 +$
$+ 3u^3 - 7uv^2 + 4u^3 - 4uv^2 + x^3 - 8x^2y.$
195. $1{,}34m - 7{,}6n + 9{,}37p - 8{,}7n - 9{,}4m - 81{,}7p + 9{,}76m + 9{,}3n +$
$+ 4{,}33p.$
196. $41{,}6(a+b^2) - 43{,}1(a+b)^2 + 37{,}8x^2 - 5{,}37(a+b)^2 + 0{,}09x^2 -$
$- 4{,}05(a+b^2) - 0{,}85(a+b^2) + 1{,}97(a+b)^2 + 4{,}19x^2.$

ОТДѢЛЪ II.

Алгебраическія дѣйствія.

ГЛАВА I.

Главнѣйшія свойства первыхъ четырехъ дѣйствій.

§ 26. **Формула дѣйствія.** Такъ какъ въ алгебрѣ числа обозначаются буквами, то и дѣйствія въ истинномъ значеніи этого слова не могутъ быть выполнены. Можно только изобразить, что надъ двумя или нѣсколькими алгебраическими выраженіями надо произвести тѣ или другія дѣйствія. Напр., если бы мы желали перемножить двучлены:

$$a + b \text{ и } a - b,$$

то надо было бы это записать такъ:

$$(a + b)(a - b).$$

Самое же дѣйствіе можетъ быть выполнено лишь тогда, когда буквы будутъ замѣнены числами.

Выраженіе, которое показываетъ, что надъ двумя или нѣсколькими алгебраическими выраженіями надо произвести извѣстныя дѣйствія, называется формулою дѣйствія.

Такова, напримѣръ, формула: $(a + b)(a - b)$.

§ 27. **Понятіе объ алгебраическихъ дѣйствіяхъ.** Почти каждую формулу дѣйствія можно преобразовать въ другую, болѣе простую, но тождественную съ данной. Такъ, нашу формулу $(a + b)(a - b)$ можно преобразовать, какъ мы увидимъ ниже, въ формулу: $a^2 - b^2$, т.-е.

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2.$$

Такое собственно преобразованіе и называется алгебраическимъ дѣйствіемъ. Итакъ, *алгебраическимъ дѣйствіемъ называется преобразованіе формулы дѣйствія въ другую, болѣе простую, но тождественную съ данной.*

§ 28. **Истины, на которыхъ основаны алгебраическія дѣйствія.** Производство алгебраическихъ дѣйствій основано на

нѣкоторыхъ истинахъ. Однѣ изъ этихъ истинъ сами собою очевидны, и называются *аксіомами;* другія же становятся очевидными послѣ нѣкотораго ряда разсужденій, и называются *теоремами.* Перечислимъ важнѣйшія аксіомы и теоремы, на которыхъ основано производство алгебраическихъ дѣйствій.

Аксіомы. 1) *Двѣ величины, равныя порознь одной и той же третьей, равны между собою.*

Напр., если $a = b$ и $c = b$, то и $a = c$.

2) *Если къ равнымъ величинамъ придадимъ поровну, или отнимемъ отъ нихъ поровну; увеличимъ ихъ, или уменьшимъ въ одинаковое число разъ,— то получимъ величины, равныя между собою.*

Напр., если $a = b$, то $a + x = b + x$, $a - x = b - x$, $ax = bx$, $a : x = b : x$.

3) *Если къ двумъ неравнымъ величинамъ придадимъ поровну, увеличимъ, или уменьшимъ ихъ въ одинаковое число разъ, — то и получатся величины неравныя, а именно: отъ бо́льшей величины и получится бо́льшая.*

Напр., если $a > b$, то $a + c > b + c$, $a - c > b - c$, $ac > bc$*), $a : c > b : c$*).

4) *Если къ двумъ равнымъ величинамъ придадимъ, или отнимемъ отъ нихъ неравныя, то получатся неравныя величины, а именно: та будетъ больше, къ которой придали больше, или отъ которой отняли меньше.*

Напр., если $a = b$, но $c > d$, то $a + c > b + d$ и $a - c < b - d$.

§ 29. **Теоремы.** 1) *Сумма не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ.*

Напр.: $a + b + c = c + b + a = c + a + b$ и т. п.

Это свойство вытекаетъ изъ самого опредѣленія суммы, какъ числа, содержащаго въ себѣ совокупность единицъ всѣхъ слагаемыхъ.

2) *Чтобы придать или отнять сумму, достаточно придать или отнять отдѣльно каждое слагаемое.*

Напр., $a + (b + c + d) = a + b + c + d$ и $a - (b + c + d) = a - b - c - d$.

Въ самомъ дѣлѣ: сумма заключаетъ въ себѣ всѣ единицы слагаемыхъ. Поэтому, результатъ долженъ получиться одинаковъ, будемъ ли мы сразу прибавлять или отнимать всѣ единицы, или по одной единицѣ, или наконецъ по нѣскольку единицъ.

---

*) Здѣсь множитель и дѣлитель разумѣются положительными.

3) *Чтобы умножить сумму на какое-нибудь число, достаточно умножить отдѣльно каждое слагаемое на это число.* Напр., $(a + b + c)m = am + bm + cm$.

При доказательствѣ этой теоремы разсмотримъ 3 случая.

I случай: m есть цѣлое число, равное, положимъ, 3. Тогда умножить $a + b + c$ на 3 значитъ взять эту сумму слагаемымъ 3 раза. Получимъ $(a + b + c)\,3 = (a + b + c) + (a + b + c) + (a + b + c) = a + b + c + a + b + c + a + b + c = 3a + 3b + 3c$.

II случай: m есть дробь, числитель которой равенъ единицѣ. Пусть $m = \frac{1}{7}$. Въ этомъ случаѣ умножить $a + b + c$ на $\frac{1}{7}$ значитъ найти седьмую часть отъ этой суммы. Легко убѣдиться, что $\frac{1}{7}$ часть $a + b + c$ будетъ равна $\frac{a}{7} + \frac{b}{7} + \frac{c}{7}$. Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ выраженіе $\frac{a}{7} + \frac{b}{7} + \frac{c}{7}$ на 7, получимъ $\left(\frac{a}{7} + \frac{b}{7} + \frac{c}{7}\right) \cdot 7 = \frac{a}{7} \cdot 7 + \frac{b}{7} \cdot 7 + \frac{c}{7} \cdot 7 = a + b + c$.

Но съ другой стороны, если мы выраженіе $(a + b + c)\frac{1}{7}$ умножимъ на 7, получимъ $(a + b + c) \cdot \frac{1}{7} \cdot 7 = (a + b + c).\ 1 = a + b + c$. Изъ этого мы заключаемъ, что $(a + b + c) \cdot \frac{1}{7} = \frac{a}{7} + \frac{b}{7} + \frac{c}{7}$, или равно $a \cdot \frac{1}{7} + b \cdot \frac{1}{7} + c \cdot \frac{1}{7}$.

III случай: m есть дробь, числитель которой больше единицы. Пусть $m = \frac{3}{7}$. Въ этомъ случаѣ умножить сумму $a + b + c$ на $\frac{3}{7}$ значитъ отъ $a + b + c$ найти $\frac{3}{7}$ части. Для этого сначала найдемъ $\frac{1}{7}$ отъ $a + b + c$; получимъ $\frac{a}{7} + \frac{b}{7} + \frac{c}{7}$. Этотъ результатъ надо взять 3 раза; получимъ: $\left(\frac{a}{7} + \frac{b}{7} + \frac{c}{7}\right) \cdot 3 = \frac{a}{7} \cdot 3 + \frac{b}{7} \cdot 3 + \frac{c}{7} \cdot 3 = a \cdot \frac{3}{7} + b \cdot \frac{3}{7} + c \cdot \frac{3}{7}$.

4) *Чтобы раздѣлить сумму на какое-нибудь число, достаточно каждое слагаемое раздѣлить на данное число.*

Требуется доказать, что $(a + b + c) : m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$. Такъ какъ дѣлимое равно частному, умноженному на дѣлителя, то, чтобы убѣдиться въ справедливости этой истины, умножимъ предполагаемое частное $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$ на дѣлителя. Получимъ:

$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}\right) m = \frac{a}{m} \cdot m + \frac{b}{m} \cdot m + \frac{c}{m} \cdot m = a + b + c$, т.-е. получимъ дѣлимое. Слѣдовательно, предполагаемое частное вѣрно.

5) *Произведеніе не измѣняется отъ перемѣны порядка множителей.*

Напр.: $3 \,.\, 5 \,.\, 7 = 5 \,.\, 3 \,.\, 7 = 7 \,.\, 3 \,.\, 5$ и т. п.

$a \,.\, b \,.\, c = b \,.\, a \,.\, c = c \,.\, a \,.\, b$ и т. п.

Теорема эта доказывается въ курсахъ ариѳметики.

6) *Чтобы умножить какое-нибудь число на произведеніе нѣсколькихъ множителей, надо умножить это число на перваго множителя, полученный результатъ на второго и т. д.*

Надо доказать, что $6 \,.\, (7 \,.\, 5) = 6 \,.\, 7 \,.\, 5$.

Такъ какъ $7 \,.\, 5 = 35$, то $6 \,.\, (7 \,.\, 5) = 6 \,.\, 35$. Перемѣстивъ въ этомъ послѣднемъ произведеніи множителей, получимъ $35 \,.\, 6$. Поставимъ теперь вмѣсто 35 двухъ множителей 7 и 5. Тогда $35 \,.\, 6 = 7 \,.\, 5 \,.\, 6$. Наконецъ, переставивъ множителя 6 на первое мѣсто, получимъ, что $7 \,.\, 5 \,.\, 6 = 6 \,.\, 7 \,.\, 5$.

Изъ этой теоремы вытекаютъ **слѣдствія:**

I. *Чтобы перемножить два произведенія, надо первое произведеніе послѣдовательно умножить на всѣхъ множителей второго,* т.-е.

$$(abc) \,.\, (def) = abc \,.\, d \,.\, e \,.\, f = abcdef.$$

II. *Въ произведеніи можно соединять множителей въ какія угодно группы.* Такъ,

$$abcdef = (abc) \,.\, (def) = (ab) \,.\, (cd) \,.\, (ef) = a \,.\, (bcd) \,.\, (ef) \text{ и т. п.}$$

7) *Чтобы раздѣлить произведеніе на какое-нибудь число, достаточно раздѣлить одного изъ множителей на это число.*

Требуется доказать, положимъ, что $\frac{abc}{m} = \frac{a}{m} \cdot bc$.

Для этого умножимъ обѣ части предполагаемаго равенства на m; получимъ:

$$\frac{abc}{m} \cdot m = \frac{a}{m} \cdot bcm.$$

Послѣднее равенство справедливо, потому что $\frac{abc}{m} \,.\, m = abc$ (такъ какъ отъ дѣленія и умноженія на одно и то же количество произведеніе abc не измѣняетъ своей величины), и $\frac{a}{m} \,.\, bcm = \frac{a}{m} \cdot mbc = abc$. Слѣдовательно, и предполагаемое равенство

$$\frac{abc}{m} = \frac{a}{m} \cdot bc$$

также справедливо, потому что второе равенство получается изъ перваго отъ умноженія обѣихъ частей на одно и то же количество m.

Такимъ же образомъ можно доказать, что

$$\frac{abc}{m} = a\frac{b}{m}c = ab\frac{c}{m}.$$

8) *Чтобы раздѣлить на какое-нибудь произведеніе, надо сначала раздѣлить на перваго множителя, полученный результатъ на второго, потомъ на третьяго* и т. д.

Напр., $216 : (4 \,.\, 3 \,.\, 6) = [(216 : 4) : 3] : 6$,
или $a : (mnp) = [(a : m) : n] : p$.

ГЛАВА II.

Алгебраическое сложеніе.

§ **30. Опредѣленіе.** Два или нѣсколько алгебраическихъ количествъ могутъ быть соединены въ одно, называемое *суммою,* которое равно совокупности всѣхъ единицъ (какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ), заключающихся въ данныхъ количествахъ.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго находится сумма нѣсколькихъ данныхъ количествъ, называется алгебраическимъ сложеніемъ.

§ **31. Сложеніе количествъ.** При сложеніи двухъ алгебраическихъ количествъ могутъ быть два случая: 1) оба количества имѣютъ одинаковые знаки, и 2) оба количества имѣютъ разные знаки.

I случай. Пусть требуется сложить $+9$ и $+5$, или -9 и -5.

Сложить $+9$ и $+5$ значитъ соединить всѣ эти положительныя единицы. 9 положительныхъ единицъ да 5 такихъ же единицъ будетъ 14 положительныхъ единицъ, или $(+9) + (+5) = +14$.

Точно такъ же отъ соединенія 9 отрицательныхъ единицъ съ 5 таковыми же получится 14 отрицательныхъ единицъ, т.-е. $(-9) + (-5) = -14$.

Изъ этихъ примѣровъ мы можемъ вывести **правило:** *Чтобы сложить количества, имѣющія одинаковые знаки, надо сложить ихъ абсолютныя величины и передъ суммою поставить ихъ общій знакъ.*

II случай. Пусть требуется сложить $+9$ и -5.

Сложить $+9$ и -5 значитъ соединить 9 положительныхъ единицъ съ 5 отрицательными. Но намъ извѣстно (§ 19), что

при соединеніи положительныхъ единицъ съ отрицательными каждая положительная единица взаимно уничтожается отрицательною. Поэтому, и въ нашемъ примѣрѣ отъ соединенія 9 положительныхъ единицъ съ 5 отрицательными взаимно уничтожится 5 положительныхъ и 5 отрицательныхъ единицъ; въ результатѣ же получится 4 положительныхъ единицы, т.-е. $(+9)+(-5)=+4$.

Разсуждая подобнымъ образомъ, найдемъ, что $(-9)+(+5)=-4$.

Изъ этихъ примѣровъ выводимъ **правило:** *Чтобы сложить количества съ разными знаками, надо вычесть ихъ абсолютныя величины: меньшую изъ бо́льшей, и передъ полученнымъ результатомъ поставить знакъ того слагаемаго, которое имѣетъ бо́льшую абсолютную величину.*

Слѣдствіе. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что алгебраическая сумма не всегда больше каждаго слагаемаго, какъ это бываетъ въ ариѳметикѣ, и что придать какое-либо число еще не значитъ увеличить данное число; обыкновенно число увеличивается, если придаютъ къ нему положительное число, и, наоборотъ, уменьшается, если придаютъ къ нему отрицательное число.

§ 32. **Сложеніе буквенныхъ количествъ.** Если алгебраическія количества изображены буквами, то самого дѣйствія сложенія выполнить нельзя, его только обозначаютъ. Для этого къ одному слагаемому приписываютъ другія съ тѣми же знаками, съ которыми они даны; знаки же дѣйствія опускаются. Такъ,

$$(+a)+(+b)=+a+b=a+b;\quad (-a)+(+b)=-a+b;$$
$$(+a)+(-b)=+a-b=a-b;\quad (-a)+(-b)=-a-b;$$
$$(+a)+(-x)+(-z)=a-x-z.$$

§ 33. **Сложеніе одночленовъ.** Такимъ же образомъ, какъ и при сложеніи букв. количествъ, поступаютъ, когда требуется сложить нѣсколько одночленовъ, т.-е. *всѣ одночлены пишутся рядомъ съ тѣми же знаками, съ которыми они даны, и затѣмъ, если возможно, дѣлается приведеніе подобныхъ членовъ.* Пусть требуется сложить одночлены: $+3a^2b$, $-4a^2c$, $-2b^2c$, $+2a^2b$. Чтобы обозначить, что эти одночлены надо сложить, пишутъ такъ: $(+3a^2b)+(-4a^2c)+(-2b^2c)+(+2a^2b)$. Затѣмъ въ полученной формулѣ надо отбросить скобки и знаки дѣйствія; получимъ:

$$3a^2b-4a^2c-2b^2c+2a^2b.$$

Наконецъ, надо сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ; получимъ: $5a^2b - 4a^2c - 2b^2c$.

Примѣры: 1. $(3a^2x) + (+7ax^2) + (-3ab^2) + (-6ab^2) = 3a^2x + 7ax^2 - 3ab^2 - 6ab^2 = 3a^2x + 7ax^2 - 9ab^2$.

2. $(5a^2b) + (-3a^2b) + (-6a^2b) + (+9a^2b) = 5a^2b - 3a^2b - 6a^2b + 9a^2b = 5a^2b$.

§ **34**. Изъ предыдущаго параграфа мы видимъ, что при сложеніи одночленовъ до приведенія въ суммѣ получается многочленъ, членами котораго служатъ одночлены, данные для сложенія, съ ихъ прежними знаками. На этомъ основаніи *всякій многочленъ можно разсматривать, какъ алгебраическую сумму всѣхъ его членовъ.*

Алгебраическая сумма, или многочленъ, обладаетъ всѣми свойствами ариѳметической (см. § 29. 1, 2, 3 и 4).

§ **35. Сложеніе многочленовъ.** Пусть требуется къ какому-нибудь алгебраическому выраженію, которое мы для краткости обозначимъ черезъ A, придать многочленъ: $a - b + c$. Такъ какъ всякій многочленъ можно разсматривать, какъ алгебраическую сумму его членовъ, то, чтобы придать многочленъ $a - b + c$ къ выраженію A, достаточно придать отдѣльно каждый его членъ (§ 29, 2); а для этого надо каждый членъ приписать съ тѣмъ же знакомъ, т.-е.

$$A + (a - b + c) = A + a - b + c.$$

Изъ этого мы можемъ вывести **правило:** *Чтобы сложить нѣсколько многочленовъ, надо къ членамъ одного изъ многочленовъ приписать послѣдовательно всѣ члены остальныхъ многочленовъ, не измѣняя при членахъ знаковъ; затѣмъ, если возможно, надо сдѣлать приведеніе.*

Положимъ, что требуется сложить многочлены:
$4a^3 - 3a^2b - 2ab^2 + 6b^3$; $3a^3 + 5a^2b - 4ab^2 + 9b^3$; $6a^3 - 5a^2b + 5ab^2$.

Для этого къ первому многочлену припишемъ всѣ члены остальныхъ многочленовъ; получимъ:

$$(4a^3 - 3a^2b - 2ab^2 + 6b^3) + (3a^3 + 5a^2b - 4ab^2 + 9b^3) + (6a^3 - 5a^2b + 5ab^2) =$$
$$= 4a^3 - 3a^2b - 2ab^2 + 6b^3 + 3a^3 + 5a^2b - 4ab^2 + 9b^3 + 6a^3 - 5a^2b + 5ab^2.$$

Сдѣлавъ приведеніе, найдемъ, что искомая сумма равна: $13a^3 - 3a^2b - ab^2 + 15b^3$.

На практикѣ при сложеніи многочленовъ, чтобы облегчить приведеніе, обыкновенно подписываютъ одно слагаемое подъ другимъ такъ, чтобы подобные члены стояли подъ подобными, и затѣмъ дѣлается приведеніе подобныхъ членовъ.

Такъ, сложеніе предыдущихъ многочленовъ полезно расположить слѣдующимъ образомъ:

$$+\begin{cases} 4a^3 - 3a^2b - 2ab^2 + 6b^3 \\ 3a^3 + 5a^2b - 4ab^2 + 9b^3 \\ 6a^3 - 5a^2b + 5ab^2 \end{cases}$$

$$\text{Сумма} = 13a^3 - 3a^2b - 1ab^2 + 15b^3.$$

Задачи. 197. $(+14)+(+16)$. **198.** $(+35)+(-36)$.
199. $(-16)+(+24)$. **200.** $(-10)+(-74)$.
201. $(+14)+(-12)+(-2)$.
202. $(+3)+(-7)+(-16)+(+12)$.
203. $(+2{,}5)+(-3{,}4)+(+16{,}4)+(-4)$.
204. $(-10)+(-12)+(-21)+(+90)$.
205. $(+a)+(+m)+(-n)$.
206. $(+x)+(+y)+(-z)$.
207. $(-a)+(-b)+(+c)$.
208. $(+m)+(-n)+(-p)+(+q)$.
209. $3a^2+(-4b^2)$.
210. $6a^2b+(-3ax^2)+(-4a^2b)$.
211. $0{,}4a^2+(-3b^2)+(+0{,}4c^2)$.
212. $2{,}1ax^3+(-3a^2x^2)+(4ax^3)+(-6b^4)$.
213. $2{,}1a^3+(-16a^2b)+(-1{,}4c^3)$.
214. $0{,}6x^2+(-0{,}5y^2)+(-0{,}4x^2)+(+0{,}5y^2)$.
215. $13a^2b+(-10xy^2)+(-13ab^2)+(+10x^2y)$.
216. $0{,}4x^2z+(-0{,}8z^3)+(-0{,}8x^2z)+(-0{,}6zx^2)$.
217. $6(a+b^2)+[-4(a+b)^2]+[-14(a+b^2)]+[-16(a+b)^2]+ + [+13(a+b^2)]$.
218. $7(x-y)^2+[+7(a-b)^2]+[+4(a-b)^2]+[-3(x-y)]+ + [-6(x-y)^2]$.
219. $(5x^3-3x^2y-6xy^2)+(-5x^2y+4x^3+10xy^2)$.
220. $(ab-4b^2-3a^2)+(5ab-10a^2+7b^2)$.
221. $(6x^3-5x^2-0{,}4x)+(x^3+3x^2+2{,}6x)+(-7x^3+6x^2-0{,}2x)$.
222. $(14a^3b-12a^2b^2-16ab^3)+(-10a^3b-12ab^3)+(+6a^3b+ + 14a^2b^2-10ab^3)$.
223. $(25a^2-90a+81x^3)+(16a^2-40a)+(31a^2+150a-60x^3)$.
224. $(7x^3-cx^2-4ab^2+c^2x-6c^3+abc)+(-3x^3+2ab^2-4c^2x- - 8abc)+(-6x^3-9cx^2+3ab^2+6c^2x-6c^3+9abc)$.
225. $(10bx^3-2b^2x^2-b^3x-a^2bx)+(13bx^3+16b^3x-13a^2bx)+ + (15bx^3+16b^2x^2-14b^3x+12a^2bx)$.
226. $(6x^2-16b^2+4bc-25c^2)+(-2x^2-10bc-10c^2)+ + (-4x^2+16b^2+6bc+35c^2)$.
227. $[3(a-b)^2-4(a-b)-2]+[7(a-b)^2-10(a-b)+ + 6]+[4(a-b)^2+3(a-b)]$.
228. $[1{,}6a^2(x-y)-4{,}3(x-y)^3+2\frac{1}{3}a(x-y)^2]+[1{,}7a^2(x-y)- - 4{,}66\ldots a(x-y)^2-3{,}4(x-y)^3]$.

229. Купецъ заплатилъ за товаръ a рублей. За сколько онъ продалъ его, если онъ получилъ на всемъ товарѣ b руб. прибыли?

Объяснить смыслъ задачи, если $a = 560$ и $b = -94$.

230. Нѣкто выигралъ m рублей. Сколько у него оказалось денегъ, если до начала игры онъ имѣлъ при себѣ b рублей?

Объяснить смыслъ задачи, если $b = 150$ и $m = -90$.

231. Термометръ показывалъ въ полдень a гр. тепла; сколько онъ показывалъ въ 2 часа дня, если температура повысилась на b градусовъ?

Объяснить смыслъ задачи и отвѣта, если $a = 6$ и $b = 7$; $a = -6$ и $b = 7$; $a = 6$ и $b = -7$; $a = -6$ и $b = -7$.

ГЛАВА III.

Алгебраическое вычитаніе.

§ **36. Опредѣленіе.** *Вычитаніе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго по данной суммѣ двухъ слагаемыхъ и одному слагаемому находится другое слагаемое.*

Данная сумма называется *уменьшаемымъ*, извѣстное слагаемое — *вычитаемымъ*, а искомое слагаемое называется *разностью*, или остаткомъ.

§ **37. Вычитаніе количествъ.** Пусть требуется вычесть изъ $+9$ количество $+5$. Вычесть $+5$ изъ $+9$ значитъ найти такое количество, которое, будучи сложено съ $+5$, дастъ въ суммѣ $+9$. Такое количество будетъ $+4$, потому что $(+4) + (+5) = +9$.

Количество $+4$ можно получить слѣдующимъ образомъ: надо къ уменьшаемому $+9$ придать вычитаемое съ обратнымъ знакомъ; получимъ $+9 + (-5) = +9 - 5 = +4$.

Пусть требуется вычесть изъ $+9$ количество -5. Въ этомъ случаѣ разность будетъ равна $+14$, потому что $+14$, сложенное съ -5, даетъ уменьшаемое $+9$.

Количество $+14$ тоже можно получить изъ уменьшаемаго черезъ прибавленіе къ нему вычитаемаго съ обратнымъ знакомъ $+9 - (-5) = +9 + (+5) = +9 + 5 = +14$.

Изъ этихъ примѣровъ мы можемъ вывести слѣдующее **правило:** *Чтобы вычесть одно количество изъ другого, надо къ уменьшаемому прибавить вычитаемое съ обратнымъ знакомъ.*

Слѣдствіе. Сравнивая разности: $+4$ и $+14$ съ уменьшаемымъ $+9$, мы видимъ, что алгебраическая разность не всегда меньше уменьшаемаго; она можетъ быть и больше его.

Обыкновенно при вычитанiи количествъ уменьшаемое уменьшается тогда, когда вычитаемое будетъ положительное, и, наоборотъ, оно увеличивается, если вычитаемое будетъ отрицательное количество.

§ 38. **Вычитанiе одночленовъ.** При вычитанiи буквенныхъ количествъ, и вообще при вычитанiи одночленовъ, самого дѣйствiя выполнить нельзя; его можно только обозначить. Для этого *къ уменьшаемому приписывается вычитаемое слагаемымъ съ обратнымъ знакомъ.* Такъ, 1) $a-(+b)=a+(-b)=a-b$; 2) $a-(-b)=a+(+b)=a+b$; 3) $5bx^2-(+3b^2x)=5bx^2-3b^2x$; 4) $-4a^2b-(-3ab^2)=-4a^2b+3ab^2$.

Легко убѣдиться въ вѣрности полученныхъ результатовъ; для этого надо къ каждой разности придать вычитаемое; такъ, 1) $(a-b)+b=a$, 2) $(a+b)+(-b)=a$ и т. д., т.-е. получимъ уменьшаемое; а это показываетъ, что найденныя разности вѣрны.

§ 39. **Вычитанiе многочленовъ.** Пусть требуется изъ какого-нибудь алгебраическаго выраженiя, которое мы для краткости обозначимъ черезъ A, вычесть многочленъ: $a-b+c$, т.-е. надо опредѣлить, чему равно:

$$A-(a-b+c).$$

Такъ какъ многочленъ $a-b+c$ можно разсматривать, какъ алгебраическую сумму его членовъ, то, чтобы отнять его отъ выраженiя A, достаточно отнять отдѣльно каждый членъ многочлена (§ 29, 2), а для этого надо каждый членъ вычитаемаго приписать къ уменьшаемому слагаемымъ съ обратнымъ знакомъ, т.-е. $A-(a-b+c)=A+(-a)+(+b)+(-c)=A-a+b-c$.

Отсюда мы можемъ вывести слѣдующее **правило:** *Чтобы вычесть одинъ многочленъ изъ другого, надо къ уменьшаемому приписать всѣ члены вычитаемаго съ обратными знаками, и затѣмъ, если возможно, сдѣлать приведенiе.*

Пусть требуется изъ многочлена: $5a^3b+3a^2b^2+4ab^3-6b^4$ вычесть многочленъ $a^3b+2a^2b^2-6ab^3-4b^4$.

$$(5a^3b+3a^2b^2+4ab^3-6b^4)-(a^3b+2a^2b^2-6ab^3-4b^4)=5a^3b+$$
$$+3a^2b^2+4ab^3-6b^4-a^3b-2a^2b^2+6ab^3+4b^4.$$

Сдѣлавъ приведенiе, найдемъ, что разность между данными многочленами равна: $4a^3b+a^2b^2+10ab^3-2b^4$.

На практикѣ при вычитаніи многочленовъ для облегченія приведенія вычитаемое подписываютъ подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы подобные члены стояли одинъ подъ другимъ; затѣмъ перемѣняютъ знаки у всѣхъ членовъ вычитаемаго и дѣлаютъ приведеніе. Такъ, вычитаніе предыдущихъ многочленовъ полезно расположить слѣдующимъ образомъ:

$$-\left\{\begin{array}{l} \;5a^3b + 3a^2b^2 + 4ab^3 - 6b^4 \\ \pm\; a^3b \pm 2a^2b^2 \mp 6ab^3 \mp 4b^4 \end{array}\right.$$

Разность $= 4a^3b + a^2b^2 + 10ab^3 - 2b^4.$

Примѣръ. $(3a^4 - 2a^2 + 1) - (-2a^4 - 3a^3 + 4a^2 - 3a + 2).$

Расположеніе дѣйствія:

$$-\left\{\begin{array}{lllll} 3a^4 & & -2a^2 & & +1 \\ \mp 2a^4 & \mp 3a^3 & \pm 4a^2 & \mp 3a & \pm 2 \end{array}\right.$$

Разность $= 5a^4 + 3a^3 - 6a^2 + 3a - 1.$

Задачи. **232.** $(+75) - (+36)$. **233.** $(+36) - (+75)$.
234. $(+24) - (-37)$. **235.** $(-41) - (-64)$.
236. $(-38) - (+7{,}36)$. **237.** $(-8) - (+41)$.
238. $(-16) - (-14) - (+12)$.
239. $(+68) - (-32) - (+121) - (-41)$.
240. $a - (+b)$. **241.** $x - (-y)$.
242. $3b - (+4c)$. **243.** $7a^2 - (-4a^3)$.
244. $8a^2 - (+8a^2)$. **245.** $8a^2 - (-8a^2)$.
246. $-3ab - (+4a^2)$. **247.** $-6a^3 - (-8a^3)$.
248. $5{,}6a^3 - (+3a^2) - (-2a) - (+1)$.
249. $4{,}9x^2a^2 - (-3xy) - (-12)$.
250. $7{,}4(a+b)^2 - [-3(a+b)^2] - [+4(a+b)^2]$.
251. $4(x-y)^m - [+3(x-y)^n] - [-2(x-y)^p]$.
252. $5a - (4b - 2a)$. **253.** $7x^2 - (3x^2 + 4y)$.
254. $2a^3 - (3a^3 + 4a^2 - a)$. **255.** $0{,}6x^2 - (3ab - 4{,}6x^2)$.
256. $18 - (-3a^2 - 4a + 17)$. **257.** $-6a^3 - (4x^2 - 12a^3)$.
258. $3{,}2a - (b - a)$. **259.** $(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)$.
260. $(3a - 4b) - (-5a + 4b)$. **261.** $7a^2 + 2a - (4a^2 + 3a - 1)$.
262. $(3a^2 + 2ab + b^2) - (4a^2 - 3ab - 4b^2) - (-5a^2 + 6ab - 2b^2)$.
263. $(9x^2 - 4{,}6x - 0{,}5) - (3{,}2x^2 - 3{,}4x - 6) - (6{,}3x^2 - 4{,}5x - 1)$.
264. $(x^3 - 2x^2y - 3xy^2 - 4y^3) - (4x^3 + 3x^2y + 2xy^2 + y^3) -$
$- (-5x^3 + 3x^2y - 2y^3)$.

Вычесть изъ перваго многочлена второй въ слѣдующихъ примѣрахъ:

265. $a^2 + 2ab + b^2;\ a^2 - 2ab + b^2$.
266. $a^2 - 2ab + b^2;\ a^2 + 2ab + b^2$.
267. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
268. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

269. $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$; $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$.
270. $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$; $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.
271. $3a^2-4a-1$; $-2a^3+4a^2-2a+1$.
272. $4a^3-3a^2+4a$; $3a^2-3ab^2-4a$.
273. $7a^3-3a^2b+2b^3$; $2a^2b-3ab^2+4a^3+4b^3$.
274. $4x^2-3xy-2y^2$; $2y^2-3xy+4x^2$.
275. $7\frac{1}{3}m^2n^2-3\frac{1}{4}m^2p^2+4\frac{1}{3}n^2p^2$; $-2{,}4m^2n^2-2m^2p^2-5n^2p^2$.

276. Термометръ показывалъ a градусовъ тепла; на сколько градусовъ повысилась температура, если черезъ нѣкоторое время термометръ сталъ показывать b градусовъ тепла?

Объяснить смыслъ задачи и отвѣта при $a=8$ и $b=12$; $a=-8$ и $b=12$; $a=-8$ и $b=-12$; $a=8$ и $b=-12$.

277. Гребецъ подвинулъ лодку впередъ на m саж., а теченіе снесло ее назадъ на n саж., на сколько саженъ лодка подвинулась впередъ?

Объяснить смыслъ задачи и отвѣта при $m=45$ и $n=20$; $m=60$ и $n=-50$; $m=-40$ и $n=-30$; $m=-50$ и $n=40$.

ГЛАВА IV.

Употребленіе скобокъ.

§ 40. **Раскрытіе скобокъ, передъ которыми стоитъ знакъ $+$, и заключеніе въ скобки частей многочлена послѣ этого знака.** Пусть мы имѣемъ выраженіе: $(a-b)+(c-d)$. Раскрыть скобки въ этомъ выраженіи означаетъ сложить двучлены $a-b$ и $c-d$. Для этого, какъ извѣстно, надо къ первому двучлену приписать члены второго, не измѣняя знаковъ; получимъ:

$$(a-b)+(c-d)=a-b+c-d.$$

Изъ этого мы видимъ, что при раскрытіи скобокъ, *передъ которыми стоитъ $+$, знаки у многочленовъ, заключенныхъ въ скобки, не измѣняются.*

Наоборотъ, заключить въ скобки какія-либо части многочлена передъ $+$ значитъ представить многочленъ въ видѣ суммы нѣсколькихъ многочленныхъ слагаемыхъ. Такъ, многочленъ: $a-b+c-d$ мы можемъ представить въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ слѣдующимъ образомъ: 1) первое слагаемое будетъ $a-b$, а второе $c-d$ или 2) первое слагаемое будетъ a, второе $-b+c-d$. Очевидно, что *при заключеніи частей многочлена послѣ $+$ знаки у членовъ остаются безъ перемѣны.* Поэтому,

$$1)\ a-b+c-d=(a-b)+(c-d),$$

$$2)\ a-b+c-d=a+(-b+c-d).$$

Чтобы убѣдиться въ справедливости этихъ равенствъ, достаточно раскрыть скобки.

Такъ какъ $a+b-c=0+a+b-c=0+(a+b-c)=+$ $+(a+b-c)$, то отсюда выводимъ правило, *что при заключеніи всего многочлена въ скобки послѣ + знаки у членовъ не измѣняются.*

§ 41. Раскрытіе скобокъ, передъ которыми стоитъ знакъ —, и заключеніе въ скобки частей многочлена послѣ этого знака. Пусть имѣемъ выраженіе $a-(b+c-d)$. Раскрыть скобки въ этомъ выраженіи значитъ произвести дѣйствіе вычитанія, а для этого, какъ извѣстно, надо къ уменьшаемому приписать всѣ члены вычитаемаго съ обратными знаками; получимъ:

$$a-(b+c-d)=a-b-c+d.$$

Изъ этого мы видимъ, что *при раскрытіи скобокъ, передъ которыми стоитъ — (минусъ), знаки у членовъ многочлена, заключеннаго въ скобки, надо измѣнить на обратные.* Напримѣръ:

1) $(3a^2-2b^2-3ab)-(6x^2+3y^2-4a)=$
$=3a^2-2b^2-3ab-6x^2-3y^2+4a.$

2) $(2a^2-3b^2)-(-4x^2+3xy-y^2)=2a^2-3b^2+4x^2-3xy+y^2.$

Обратно, заключить въ скобки какую-либо часть многочлена послѣ минуса значитъ представить многочленъ въ видѣ разности. Такъ, многочленъ: $a+b-c-d$ можно представить въ видѣ разности слѣдующимъ образомъ:

1) уменьшаемымъ будетъ первый членъ, а вычитаемымъ три послѣдніе;

2) уменьшаемымъ будутъ первые два члена, а вычитаемымъ два послѣдніе.

Такъ какъ при раскрытіи скобокъ передъ минусомъ знаки у членовъ измѣняются на противоположные, то, наоборотъ, *при заключеніи въ скобки извѣстной части многочлена послѣ минуса надо у всѣхъ членовъ, заключаемыхъ въ скобки, перемѣнить знаки на обратные.* Поэтому,

1) $a+b-c-d=a-(-b+c+d),$
2) $a+b-c-d=(a+b)-(c+d).$

Чтобы убѣдиться въ справедливости этихъ равенствъ, достаточно раскрыть скобки.

Такъ какъ $a-b+c=0+a-b+c=0-(-a+b-c)=$ $=-(-a+b-c)$, то отсюда выводимъ правило, что *при заклю-*

ченіи въ скобки всего многочлена послѣ знака минуса надо у всѣхъ членовъ измѣнить знаки на обратные. Напримѣръ:

I. $-3a+2b-c=-(3a-2b+c)$.

II. $5a^2-4ab-3b^2=-(-5a^2+4ab+3b^2)$.

Задачи. Упростить выраженія:

278. $a+[b-(c-d)]$.
279. $a-[b-(c-d)]$.
280. $x-[y+(z+u)]$.
281. $a^2-[(b+c)-d]$.
282. $a-\{b-[(c+d)-f+e]-k\}$.
283. $a-\{a-[b-c-(d+a)]\}$.
284. $a-\{3a-[4a-(5a+6a)]\}$.
285. $4x^2-\{3x^2-[2x^2-(5x^2-6x^2)]\}$.
286. $a-\{3b+[a-(2b+3c)-4c-(2a+3b-c)]\}$.
287. $3m-\{m+n-[m+n+p-(m-n-p+q)]\}$.
288. $4x^2y-\{2\frac{3}{4}xy^2+[6x^2y-(3xy^2-x^2y)]\}$.
289. $2abc-\{3a^2b-[4abc-(8ab^2-6a^2b)+2ab^2]\}$.
290. $4a^2-\{5b^2-[2a^2-(8a^2-4b^2)+6ab]+4a^2\}$.
291. $7a^3-\{4a^4-[3a^2-(4a^5-9a^4)-(8a^3-4a^5)]-11a^4-8a^5\}$.
292. $5m^2+\{4b^2-[5a-(3b-4m^2)+(6a-3b^2)+7a^2]\}$.
293. $3x^2-\{4y^2-2z^2+[4x^2-(3y^2-6z^2)-(2x^2-4y^2)]\}$.
294. $5a^m-\{4a^n+[-6a^n-(7a^m+9a^n)-6a^m]-8a^n\}$.
295. $\{3a^2-[4ab+(-3b^2-2ab)+4a^2]\}-\{5b^2-[4a^2-(3ab-4b^2)]\}$.
296. $\{4-[3a-(2b+c)-4d]\}-\{a-[(b-c+3d)-d]\}$.
297. $-(a+b-c)$.
298. $-(-3a^2+4bc-3ac+2b^2)$.
299. $-[3x^2-2y^2+(4xy-2y^2+3x^2)]$.
300. $-\{6a^2-[3ab-4a^2-(b^2-2ab)+4b^2]\}$.
301. $-[3a^2-(2b^2-4a^2)]-[2b^2-3ab-(-4a^2+2b^2)]$.

302. Вычесть разность многочленовъ a^2+2a-1 и a^2-2a+1 изъ a^2-1.

303. Изъ суммы первыхъ трехъ многочленовъ $a^2+b^2+c^2+d^2$, $a^2-b^2-c^2+d^2$, $a^2+b^2-c^2+d^2$, $a^2+b^2+c^2-d^2$ вычесть сумму послѣднихъ трехъ.

Чему равны выраженія:

304. $x+y-z-t$.
305. $x-y-z-t$.
306. $x-(y+z-t)$.
307. $-(x-y+z-t)$,

если $x=a+b+c$, $y=a+b-c$, $z=a+c-b$, $t=b+c-a$.

Чему равны выраженія:

308. $m-(n-q-p)$.
309. $-(m-n+p)-q$.

310. $-m + n - (p - q)$, **311.** $-(-m - n - p + q)$,
если $m = 3a^2 - 2ab + b^2$; $n = 5a^2 - 4ab + 3b^2$;
$p = -7a^2 + 5ab + 3b^2$; $q = 4a^2 - 2ab + b^2$.

312. Не измѣняя значенія многочлена: $3a^3 + 4a^2 - 5a - 6$, заключить въ скобки: 1) послѣдніе три члена, 2) послѣдніе два члена, 3) послѣдній членъ, и каждый разъ передъ скобками поставить знакъ плюсъ.

313. Не измѣняя значенія многочлена: $4a^2 - 3b^2 + c^2 + 2bc$, заключить въ скобки: 1) послѣдніе три члена, 2) послѣдніе два члена, 3) послѣдній одинъ членъ, и каждый разъ поставить передъ скобками знакъ минусъ.

314. Не измѣняя значенія, заключить въ скобки весь многочленъ: $-2a^2 + 3a - 1$ и поставить передъ скобками знакъ минусъ.

315. То же сдѣлать съ многочленомъ:

$$5a^2 - 3b^2 + 4c^2 - 2ab + 3bc - 4ac.$$

316. Не измѣняя значенія многочлена: $a^4 - 3a^3 + 4a^2 - 2a - 3$, поставить скобки передъ $3a^3$ и послѣ $4a^2$, передъ $2a$ и послѣ 3; затѣмъ все выраженіе заключить въ скобки, передъ которыми поставить знакъ минусъ.

ГЛАВА V.

Алгебраическое умноженіе.

§ 42. **Опредѣленіе.** Изъ ариѳметики намъ извѣстно, что умножить одно число на другое значитъ изъ множимаго составить новое число такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы. Такъ какъ въ алгебрѣ разсматриваются двоякаго рода единицы: положительныя и отрицательныя, то вышеупомянутое опредѣленіе не совсѣмъ подходитъ для умноженія алгебраическихъ количествъ.

Подъ алгебраическимъ умноженіемъ разумѣется такое дѣйствіе, посредствомъ котораго изъ множимаго составляется новое число такимъ же образомъ, какъ множитель составленъ изъ **положительной** *единицы.*

§ 43. **Умноженіе количествъ. Правило знаковъ.** Разсмотримъ, какимъ образомъ умножаются алгебраическія количества. При умноженіи алгебраическихъ количествъ могутъ быть слѣдующіе четыре случая:

I. *Пусть требуется умножить* $+8$ *на* $+3$. Умножить $+8$ на $+3$ значитъ изъ $+8$ составить новое число такъ, какъ $+3$ составлено изъ положительной единицы. Но $+3$ составлено изъ положительной единицы такъ: положительная единица взята слагаемымъ три раза; слѣдовательно, чтобы умножить $+8$ на $+3$, надо $+8$ взять слагаемымъ 3 раза; получимъ:

$$(+8)\,.\,(+3) = +8+8+8 = +24.$$

II. *Пусть требуется* -8 *умножить на* $+3$. И въ этомъ случаѣ, разсуждая попредыдущему, найдемъ, что умножить -8 на $+3$ значитъ -8 взять слагаемымъ 3 раза.

$$(-8)\,.\,(+3) = (-8)+(-8)+(-8) = -24.$$

III. *Пусть требуется умножить* $+8$ *на* -3. Искомое произведеніе въ этомъ случаѣ должно быть составлено изъ $+8$ такимъ образомъ, какъ -3 составлено изъ положительной единицы. Но -3 составлено изъ положительной единицы такъ: въ положительной единицѣ перемѣненъ знакъ, и полученная отрицательная единица взята слагаемымъ 3 раза; слѣдовательно, и въ данномъ случаѣ, чтобы найти искомое произведеніе, надо въ множимомъ $+8$ измѣнить знакъ и полученное количество взять слагаемымъ 3 раза.

$$(+8)\,.\,(-3) = (-8)+(-8)+(-8) = -24.$$

IV. *Пусть требуется умножить* -8 *на* -3. Умножить -8 на -3 значитъ составить новое число изъ -8 такъ, какъ множитель -3 составленъ изъ положительной единицы. Множитель же -3 составленъ изъ положительной единицы такъ: въ положительной единицѣ перемѣненъ знакъ, и полученная отрицательная единица взята слагаемымъ 3 раза. Слѣдовательно, для умноженія -8 на -3 надо въ множимомъ перемѣнить знакъ, и полученное число $+8$ взять слагаемымъ 3 раза, — найдемъ:

$$(-8)\,.\,(-3) = +8+8+8 = +24.$$

Итакъ:
1) $(+8)\,.\,(+3) = +24$,
2) $(-8)\,.\,(+3) = -24$,
3) $(+8)\,.\,(-3) = -24$,
4) $(-8)\,.\,(-3) = +24$.

Изъ этихъ примѣровъ мы можемъ вывести слѣдующее **правило**: *При умноженіи двухъ количествъ надо перемножить ихъ абсолютныя величины и въ полученномъ произведеніи поставить* $+$*, если знаки множимаго и множителя одинаковы, и* $-$*, если знаки разные.*

§ **44.** Пусть требуется составить произведеніе изъ слѣдующихъ множителей:

$$(-1) \cdot (+2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (+5) \cdot (-6).$$

Отъ умноженія -1 на $+2$ получимъ -2; отъ умноженія -2 на -3 получимъ $+6$; отъ умноженія $+6$ на -4 получимъ -24; отъ умноженія -24 на $+5$ получимъ -120; наконецъ, перемноживъ -120 и -6, получимъ $+720$. Слѣдовательно,

$$(-1) \cdot (+2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (+5) \cdot (-6) = +720.$$

Точно такъ же отъ перемноженія $(+8) \cdot (-6) \cdot (+4) \cdot (-\frac{3}{4}) \cdot (-\frac{5}{8})$ получимъ произведеніе -90.

Вообще, *при составленіи произведенія изъ нѣсколькихъ множителей надо послѣдовательно перемножить ихъ абсолютныя величины и въ произведеніи поставить плюсъ, если число отрицательныхъ множителей будетъ четное, и минусъ, если число ихъ будетъ нечетное.*

§ **45.** Изъ предыдущаго вытекаютъ слѣдствія:

1) Если мы измѣнимъ знакъ у одного, трехъ, пяти и, вообще, у нечетнаго числа множителей, то измѣнится знакъ самого произведенія; если же мы измѣнимъ знакъ у двухъ, четырехъ, — вообще, у четнаго числа множителей, то знакъ произведенія не измѣнится.

2) Отъ возвышенія въ степень положительнаго числа получается всегда число положительное; напр.: $(+2)^3 = +8$; $(+3)^4 = +81$. Отъ возвышенія же въ степень отрицательнаго числа можетъ получиться и положительное, и отрицательное число. Положительнымъ оно будетъ тогда, когда степень будетъ четная; такъ, $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81$; отрицательнымъ же оно будетъ при нечетной степени; такъ, $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$.

§ **46. Умноженіе буквенныхъ количествъ.** Если количества изображены буквами, то самого дѣйствія умноженія выполнить нельзя, — оно только обозначается. Для этого всѣ

количества пишутся рядомъ множителями, при чемъ соблюдается правило знаковъ. Такъ,

1) $(+a) \cdot (-b) \cdot (+c) = -abc$. 2) $(-a) \cdot (-b) \cdot (+c) = abc$.

§ 47. **Умноженіе одночленовъ.** При умноженіи одночленовъ такъ же, какъ и при умноженіи буквенныхъ количествъ, надо къ производителямъ множимаго приписать послѣдовательно производителей множителя (§ 29, 6, слѣд. I). Такъ, $(5a^2b) \cdot (xy^2) = 5a^2b \cdot x \cdot y^2 = 5a^2bxy^2$.

Но такъ какъ въ составъ одночлена могутъ входить коэффиціенты и степени, то при умноженіи одночленовъ допускаются нѣкоторыя упрощенія, извѣстныя подъ именемъ: 1) *правила коэффиціентовъ* и 2) *правила показателей степени*.

§ 48. **Правило коэффиціентовъ.** Положимъ, что требуется умножить $6a^2b$ на $5cd$. Искомое произведеніе равно $6 \cdot a^2 \cdot b \cdot 5 \cdot c \cdot d$. Переставивъ къ началу множителя 5 и помноживъ его на 6, получимъ:

$$6a^2b \cdot 5cd = 6 \cdot 5 \cdot a^2bcd = 30a^2bcd,$$

т.-е. *при умноженіи одночленовъ коэффиціенты надо перемножить*.

Примѣры: 1) $3ax^2 \cdot (-7by) = -21ax^2by$.
2) $(-5a^2b) \cdot (-7cd^2) = 35a^2bcd^2$.

§ 49. **Правило показателей степени.** Пусть требуется умножить a^5 на a^3.

Такъ какъ $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ и $a^3 = a \cdot a \cdot a$, то
$$a^5 \cdot a^3 = aaaaa \cdot aaa = a^8 = a^{5+3}.$$

На основаніи этого заключаемъ, что *при умноженіи степеней одного и того же количества показатели ихъ складываются.*

Примѣры: 1) $b^6 \cdot b^7 = b^{13}$. 2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
3) $a^{m+n} \cdot a^{m-n} = a^{(m+n)+(m-n)} = a^{2m}$.

§ 50. Пусть теперь надо умножить $8a^3b^2c$ на $5a^2bc^3d^2$. Искомое произведеніе будетъ равно $8 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c \cdot 5 \cdot a^2 \cdot b \cdot c^3 \cdot d^2 = (8 \cdot 5) \cdot (a^3 \cdot a^2) \cdot (b^2 \cdot b) \cdot (c \cdot c^3) \cdot d^2 = 40a^5b^3c^4d^2$.

Изъ всего вышесказаннаго выводимъ **правило:** *При умноженіи одночленовъ коэффиціенты надо перемножить, показателей одинаковыхъ буквъ сложить, а тѣ буквы, которыя входятъ множителями одинъ разъ, написать въ произведеніи рядомъ, не измѣняя ихъ показателей, — при этомъ соблюдается правило знаковъ.*

Примѣры: 1) $(3{,}5a^3b^2x) \cdot (4ab^2x^2y) = 14a^4b^4x^3y$.
2) $(\frac{1}{3}a_m b^{n-1}c^2) \cdot (-\frac{3}{4}ab^{n+2}c) = -\frac{1}{4}a^{m+1}b^{2n+1}c^3$.
3) $[3(a-b)^2(a+b)^3] \cdot [4(a-b)^3(a+b)] =$
$= 12(a-b)^5(a+b)^4$.
4) $(4a^3b^2)^3 = 4a^3b^2 \cdot 4a^3b^2 \cdot 4a^3b^2 = 64a^9b^6$.

§ **51. Умноженіе многочлена на одночленъ.** Пусть требуется умножить многочленъ $a - b + c$ на одночленъ m.

Намъ уже извѣстно (§ 29, 3), что для того, чтобы умножить сумму на какое-нибудь количество, достаточно умножить отдѣльно каждое слагаемое на это количество. Такъ какъ всякій многочленъ можно разсматривать, какъ алгебраическую сумму, то

$$(a - b + c) \cdot m = am - bm + cm.$$

Отсюда выводимъ **правило:** *Чтобы умножить многочленъ на одночленъ, надо каждый членъ многочлена помножить на множителя, соблюдая при этомъ правило знаковъ, правило коэффиціентовъ и правило показателей степени.*

Примѣры: 1) $(3a^2b - 4ab^2 + b^3) \cdot 5ab = 15a^3b^2 - 20a^2b^3 + 5ab^4$.
2) $(-4a^3 - 3a^2b - 2ab^2) \cdot (-2b) = 8a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3$.
3) $(3a^{n-1} - 5a^{n+1}b^n - 4b^{n-3}) \cdot 2a^n b^{n-1} =$
$= 6a^{2n-1}b^{n-1} - 10a^{2n+1}b^{2n-1} - 8a^n b^{2n-4}$.

§ **52. Умноженіе одночлена на многочленъ.** Пусть требуется m умножить на $a + b - c$.

Такъ какъ произведеніе отъ перестановки множителей не измѣняетъ своей величины, то

$$m(a + b - c) = (a + b - c)\, m = am + bm - cm,$$

т.-е. правило для умноженія одночлена такое же, какъ и для умноженія многочлена на одночленъ.

§ **53. Умноженіе многочлена на многочленъ.** Пусть требуется умножить многочленъ $a + b + c$ на $m - n$. Для этого допустимъ, что множитель $m - n = q$. Тогда $(a + b + c)(m - n) = (a + b + c)\, q = aq + bq + cq$.

Подставивъ въ послѣднемъ выраженіи $m - n$ вмѣсто q, получимъ:

$$(a + b + c)\,(m - n) = a(m - n) + b\,(m - n) + c(m - n) = am - an + bm - bn + cm - cn.$$

Разсматривая полученный результатъ и сравнивая его съ множимымъ и множителемъ, мы легко можемъ замѣтить слѣ-

дующее **правило:** *Чтобы умножить многочленъ на многочленъ, надо каждый членъ множимаго помножить на каждый членъ множителя, соблюдая при этомъ правило знаковъ, правило коэффиціентовъ и правило показателей степени; затѣмъ, если возможно, надо сдѣлать приведеніе.*

Примѣры: 1) $(a^2+4ab-2b^2)(5b-2a)$. Умноживъ всѣ члены множимаго на $5b$, получимъ $5a^2b+20ab^2-10b^3$; затѣмъ, умноживъ всѣ члены множимаго на $-2a$, получимъ $-2a^3-8a^2b+$ $+4ab^2$. Слѣдовательно,

$$(a^2+4ab-2b^2)\ (5b-2a)=5a^2b+20ab^2-10b^3-2a^3-8a^2b+4ab^2.$$

Сдѣлавъ приведеніе, найдемъ, что искомое произведеніе равно: $-3a^2b+24ab^2-10b^3-2a^3$.

2) $(5a^3-2a^2x+ax^2)(2a^2-ax+x^2)=$
$=10a^5-4a^4x+2a^3x^2-5a^4x+2a^3x^2-a^2x^3+5a^3x^2-2a^2x^3+ax^4=$
$=10a^5-9a^4x+9a^3x^2-3a^2x^3+ax^4$.

3) $(2ab+3)^2=(2ab+3)(2ab+3)=$
$=4a^2b^2+6ab+6ab+9=4a^2b^2+12ab+9$.

§ **54.** На практикѣ, чтобы облегчить приведеніе подобныхъ членовъ, обыкновенно располагаютъ члены множимаго и множителя въ такомъ порядкѣ, чтобы показатели степеней какой-нибудь буквы шли, постепенно *уменьшаясь* или *увеличиваясь*. Та буква, относительно которой располагаются члены многочлена, называется *главною*. — Если, при расположеніи многочлена, показатели главной буквы идутъ, постепенно уменьшаясь, то говорятъ, что многочленъ расположенъ по *нисходящимъ*, или *убывающимъ* степенямъ; если же показатели постепенно увеличиваются, то говорятъ, что многочленъ расположенъ по *восходящимъ*, или *возрастающимъ* степенямъ. Такъ, многочленъ:

$$a^4-3a^3b+5a^2c^2-4ab^3+c^4$$

расположенъ по убывающимъ степенямъ главной буквы a. Если же мы напишемъ его въ обратномъ порядкѣ, то онъ будетъ расположенъ по возрастающимъ степенямъ буквы a:

$$c^4-4ab^3+5a^2c^2-3a^3b+a^4.$$

Тотъ членъ, который содержитъ главную букву съ наибольшимъ показателемъ, называется *высшимъ*; членъ же, содержащій главную букву съ наименьшимъ показателемъ, или вовсе не содержащій ея, называется *низшимъ*. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ высшій членъ будетъ a^4, а низшій c^4.

Расположивъ многочлены, данные для умноженія, по убывающимъ или возрастающимъ степенямъ какой-нибудь буквы, подписываютъ множителя подъ множимымъ и проводятъ черту внизу многочленовъ. Затѣмъ умножаютъ всѣ члены множимаго на первый членъ множителя и полученное произведеніе подписываютъ подъ чертою. Далѣе, всѣ члены множимаго умножаютъ на второй членъ множителя и полученное второе произведеніе подписываютъ подъ первымъ такъ, чтобы подобные члены стояли подъ подобными. Такимъ же образомъ поступаютъ и съ остальными членами множителя. Подъ послѣднимъ произведеніемъ проводятъ снова черту и пишутъ подъ ней полное произведеніе, для чего складываютъ всѣ найденныя частныя произведенія.

Покажемъ это на примѣрѣ. Пусть требуется многочленъ $7a^2 - 3 + 5a^3 + a$ умножить на $-3a + 2a^2 - 1$.

Расположеніе дѣйствія:

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\text{Множимое} \times & 5a^3 & +7a^2 & +a & -3 & & \\
\text{Множитель} & 2a^2 & -3a & -1 & & & \\
\hline
10a^5 + 14a^4 + 2a^3 - 6a^2 & & & & & & \text{. . Произв. мн. на } 2a^2 \\
\quad - 15a^4 - 21a^3 - 3a^2 + 9a & & & & & & \text{,, ,, ,, } -3a \\
\quad\quad - 5a^3 - 7a^2 - a + 3 & & & & & & \text{,, ,, ,, } -1 \\
\hline
\end{array}$$

Пол. произв. $= 10a^5 - a^4 - 24a^3 - 16a^2 + 8a + 3$.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что при умноженіи многочленовъ дѣйствіе располагается такъ же, какъ и при умноженіи многозначныхъ чиселъ. Разница состоитъ лишь въ томъ, что начинаютъ умноженіе съ лѣвой руки, а не съ правой, какъ это дѣлается въ ариѳметикѣ.

Примѣчаніе. Если множимое не содержитъ всѣхъ степеней главной буквы, то полезно въ частныхъ произведеніяхъ оставлять пустыя мѣста между членами.

Покажемъ это на примѣрѣ. Пусть требуется умножить $a^4 - 3a + 1$ на $a^2 + 2a - 1$.

$$\begin{array}{l}
a^4 - 3a + 1 \\
a^2 + 2a - 1 \\
\hline
a^6 \quad ,, \quad ,, \; - 3a^3 + a^2 \\
\quad 2a^5 \quad ,, \quad ,, \; - 6a^2 + 2a \\
\quad\quad - a^4 \quad ,, \quad ,, \; + 3a - 1 \\
\hline
a^6 + 2a^5 - a^4 - 3a^3 - 5a^2 + 5a - 1.
\end{array}$$

§ 55. **Слѣдствія.** Разсматривая полученныя произведенія: 1) $10a^5-a^4-24a^3-16a^2+8a+3$ и 2) $a^6+2a^5-a^4-3a^3-5a^2+5a-1$, мы легко можемъ замѣтить слѣдующее:

1) *Если множимое и множитель расположены по убывающимъ* (или возрастающимъ) *степенямъ главной буквы, то и произведеніе будетъ расположено такимъ же образомъ.*

2) *Отъ умноженія высшаго члена множимаго на высшій членъ множителя получается высшій членъ произведенія; отъ перемноженія же низшихъ членовъ получается низшій членъ произведенія.*

3) *Высшій и низшій члены произведенія не имѣютъ себѣ подобныхъ членовъ.*

§ 56. **Число членовъ произведенія.** Такъ какъ при умноженіи многочленовъ каждый членъ множимаго умножается на каждый членъ множителя, то число членовъ произведенія до приведенія равно произведенію: числа членовъ множимаго на число членовъ множителя. Такъ, если въ множимомъ будетъ 5 членовъ, а въ множителѣ 4, то произведеніе этихъ многочленовъ до приведенія будетъ имѣть $(5\times4)=20$ членовъ.

Послѣ же приведенія нѣкоторые члены произведенія соединятся въ одинъ, другіе же могутъ взаимно уничтожиться, только останутся безъ перемѣны высшій и низшій члены, которые не имѣютъ себѣ подобныхъ. Поэтому, въ полномъ произведеніи послѣ приведенія число членовъ не можетъ быть меньше двухъ. Напримѣръ:

$$\times\left\{\begin{array}{l} a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4 \\ a+b \end{array}\right.$$
$$\begin{array}{llllll} a^5 & -a^4b & +a^3b^2 & -a^2b^3 & +ab^4 & \\ & +a^4b & -a^3b^2 & +a^2b^3 & -ab^4 & +b^5 \\ \hline a^5 & ,, & ,, & ,, & ,, & +b^5. \end{array}$$
$$(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)(a+b)=a^5+b^5.$$

§ 57. **Замѣчательные случаи умноженія многочленовъ.**

I случай: $(a+b)^2=(a+b)\,.\,(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=$ $=\boldsymbol{a^2+2ab+b^2}$, т.—е. *квадратъ суммы двухъ количествъ* $=$ *квадрату перваго количества,* $+$ *удвоенное произведеніе перваго количества на второе,* $+$ *квадратъ второго количества.*

II случай: $(a-b)^2=(a-b)\,.\,(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=$ $=\boldsymbol{a^2-2ab+b^2}$, т.-е. *квадратъ разности двухъ количествъ* $=$ *квадрату перваго количества, минусъ удвоенное произведеніе перваго количества на второе,* $+$ *квадратъ второго количества.*

III случай: $(a+b).(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=\boldsymbol{a^2-b^2}$, т.-е. *произведеніе суммы двухъ количествъ на ихъ разность равно разности квадратовъ этихъ количествъ.*

IV случай: $(a+b)^3=(a+b)^2.(a+b)=(a^2+2ab+b^2).(a+b)=$ $=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=\boldsymbol{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$, т.-е. *кубъ суммы двухъ количествъ равенъ кубу перваго количества, + утроенное произведеніе квадрата перваго количества на второе, + утроенное произведеніе перваго количества на квадратъ второго, + кубъ второго количества.*

Всѣ вышеприведенные случаи называются замѣчательными потому, что они весьма часто употребляются при упрощеніи различныхъ алгебраическихъ выраженій. Поэтому, весьма важно твердо запомнить эти формулы, чтобы во всякое время возможно было съ успѣхомъ ими пользоваться. Покажемъ на примѣрахъ примѣненіе этихъ формулъ.

1) Вычислить $(3a^2b+4c)^2$.
На основаніи перваго замѣчательнаго случая имѣемъ:
$(3a^2b+4c)^2=(3a^2b)^2+2.\ \ 3a^2b.\ \ 4c+(4c)^2=9a^4b^2+24a^2bc+16c^2$.

2) Вычислить $(5a-1)^2$.
Основываясь на второмъ случаѣ, имѣемъ:
$(5a-1)^2=(5a)^2-2.5a\ .\ 1+1^2=25a^2-10a+1$.

3) Вычислить $(7x^2+4y).\ \ (7x^2-4y)$.
Здѣсь приходится умножить сумму на разность. Поэтому, $(7x^2+4y).\ \ (7x^2-4y)=(7x^2)^2-(4y)^2=49x^4-16y^2$.

4) $(5ax^2+2b^2y)^3=(5ax^2)^3+3.(5ax^2)^2.2b^2y+3.5ax^2.(2b^2y)^2+(2b^2y)^3=$ $=125a^3x^6+150a^2x^4b^2y+60ax^2b^4y^2+8b^6y^3$.

5) $(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2.(a+b).c+c^2=$ $=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

6) $(x+y-z).(x-y+z)$. Чтобы вычислить это выраженіе сокращеннымъ способомъ, заключимъ два послѣдніе члена множимаго и множителя въ скобки; получимъ:

$$[x+(y-z)].[x-(y-z)]=x^2-(y-z)^2=x^2-(y^2-2yz+z^2)=$$
$$=x^2-y^2+2yz-z^2.$$

Примѣчаніе: Полезно замѣтить слѣдующія формулы:

1) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
2) $(x+a).(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b).x+ab$.
3) $(x-a).(x-b)=x^2-ax-bx+ab=x^2-(a+b).x+ab$.
4) $(x+a).(x-b)=x^2+ax-bx-ab=x^2+(a-b).x-ab$.
5) $(x-a).(x+b)=x^2-ax+bx-ab=x^2-(a-b).x-ab$.

§ 58. **Раскрытіе скобокъ.** Возьмемъ выраженіе: $4x\ (3a+ +2b-c)$. Въ этомъ выраженіи раскрыть скобки значитъ произвести умноженіе одночлена $4x$ на многочленъ $3a+2b-c$. Поэтому,

$$4x\ (3a+2b-c)=12ax+8bx-4cx.$$

Но иногда дѣйствіе умноженія соединяется съ дѣйствіемъ сложенія или вычитанія. Въ такихъ случаяхъ надо обращать особенное вниманіе на раскрытіе скобокъ.

Положимъ, что намъ надо раскрыть скобки въ выраженіи: $3a+2b\ (x-y+z)$. Здѣсь требуется не только умножить одночленъ $2b$ на многочленъ $x-y+z$, но и полученный результатъ придать къ $3a$. Сначала мы выполнимъ умноженіе, а потомъ сложеніе:

$$3a+2b\ (x-y+z)=3a+(2bx-2by+2bz)=$$
$$=3a+2bx-2by+2bz.$$

Пусть требуется раскрыть скобки въ выраженіи: $3a-2b.$ $.(x-y+z)$. Въ этомъ случаѣ надо, во-первыхъ, одночленъ $2b$ умножить на многочленъ $x-y+z$ и, во-вторыхъ, полученный результатъ вычесть изъ $3a$. Сдѣлаемъ это послѣдовательно.

$$3a-2b\ (x-y+z)=3a-(2bx-2by+2bz)=$$
$$=3a-2bx+2by-2bz.$$

Сравнивая результаты съ данными выраженіями, мы можемъ вывести слѣдующее **правило:** *Если дѣйствіе умноженія соединено съ дѣйствіемъ сложенія, то при раскрытіи скобокъ знаки во всѣхъ членахъ не измѣняются; если же умноженіе соединено съ дѣйствіемъ вычитанія, то при раскрытіи скобокъ надо въ вычитаемомъ измѣнить знаки всѣхъ членовъ на противоположные.*

Задачи.

317. $(+0{,}4)\ .\ (-6{,}7)$.
318. $(-0{,}366\ ..)\ .\ (+0{,}766\ ..)$.
319. $(-6{,}4)\ .\ (-0{,}8)$.
320. $(-4{,}5)\ .\ (-\frac{3}{8})$.
321. $(+0{,}6)\ .\ (+0{,}3)\ .\ (-20)$.
322. $(+6)\ .\ (-7)\ .\ (+8)$.
323. $(+a)\ .\ (+b)\ .\ (-c)$.
324. $(-a)\ .\ (-b)\ .\ (+c)$.
325. $(+x)\ .\ (-y)\ .\ (+z)$.
326. $(-m)\ .\ (-n)\ .\ (-p)\ .\ (-q)$.
327. $(+z)\ .\ (-f)\ .\ (-u)\ .\ (+v)$.
328. $(-z)\ .\ (-t)\ .\ (-u)\ .\ (-v)$.
329. $3a\ .\ 4b$.
330. $7{,}6ax\ .\ 4yz$.
331. $8ab\ .\ 5{,}6x^2y$.
332. $4{,}6x^2y\ .\ 5zt$.
333. $a^2\ .\ a^3$.
334. $b^4\ .\ b^7$.
335. $m^3\ .\ m^8$.
336. $m^{13}\ .\ m^{15}$.

337. $a^3 \cdot a$.

338. $b^7 \cdot b$.

339. $c^n \cdot c^2$.

340. $x^n \cdot x^5$.

341. $b^{n+2} \cdot b^3$.

342. $y^x \cdot y$.

343. $a^n \cdot a^m$.

344. $c^{n+2} \cdot c^{m-2}$.

345. $a^{x-1} \cdot a^{x+1}$.

346. $b^{2n+1} \cdot b^{1-2n}$.

347. $a^{m+1} \cdot a^{m-1} \cdot a^{n-2}$.

348. $x^{3+n} \cdot x^{n-3} \cdot x^2$.

349. $5a^2 \cdot 4a^3$.

350. $7a^3 \cdot 4a$.

351. $3a^2b \cdot 4a^3b^2c$.

352. $8a^3b^2x \cdot 7abx^2y$.

353. $-0{,}4a^2x^2 \cdot -40ax$.

354. $-7\frac{1}{2}a^3b \cdot 4ab^3$.

355. $3(a-b)^2 \cdot -4(a-b)^3$.

356. $-0{,}4x^2y \cdot 0{,}7x^3y^2$.

357. $0{,}5a^2b^2x \cdot -4ab^3x^2$.

358. $0{,}6a^2m \cdot -3{,}4am^2 \cdot 6am$.

359. $3a^2b \cdot 3a^2b$.

360. $4c^2de \cdot 4c^2de$.

361. $(0{,}7a^3b^2)^2$.

362. $(5{,}6a^3bx)^2$.

363. $(-3a^2x^2y)^2$.

364. $(-1{,}3a^2x^2)^2$.

365. $4a^2(3a^2x)^2$.

366. $0{,}5a(-4a^2bx)^2$.

367. $(7ab^2)^3$.

368. $(-0{,}4ab^2)^3$.

369. $(-0{,}4x^2y^3z^n)^3$.

370. $4a^3(4a^3b)^3$.

371. $-3a^2b(-2ab^2)^3$.

372. $(-6a^2b)^3 \cdot (4a^2b^3x)$.

373. $(2a^3b^2x)^4$.

374. $(-3a^5b^2y)^4$.

375. $4ab(x-y)^2 \cdot -3a(x-y)$.

376. $7ab(a^2-b^2) \cdot 4a(a^2-b^2)$.

377. $4a^n b \cdot -3a^2b^n c \cdot -4a^{5-n}bc^2$.

378. $-3a^{n-1}b \cdot -2a^{n+2}b^{m-1} \cdot 4a^2c^3$.

379. $-\frac{3}{8}a^2b^2c^{n+2} \cdot \frac{8}{9}a^{m+n}bc^{n-3}$.

380. $-\frac{3}{7}a^2b^{n-3}c^{x-2y} \cdot 1{,}4b^{n+2}c^{x+2y}\ x$.

381. $(\frac{1}{2}ax^3)^3 \cdot 6x^{3n-4}$.

382. $(a^2-ab+b^2) \cdot 4a$.

383. $(a^2+ab-b^2) \cdot -3ab$.

384. $(4a^2-3a+2) \cdot 7a^2$.

385. $(0{,}4a^2x-3{,}4ax^2+4x^3) \cdot 8x^2$.

386. $(6a^3-3a^2x+4ax^2-6x^3) \cdot -5ax^2$.

387. $(-7m^2n^2+4m^2p^2+3n^2p^2) \cdot -0{,}28m^2n^2p^2$.

388. $(3x^{m-1}+6x^{m-2}-x^{m-4}) \cdot 4x^3$.

389. $(2a^{n-2}b^3-4a^{n-1}b^2+6{,}3a^n b-5a^{n+1}) \cdot a^4b^{n-3}$.

390. $3ax^2(4ax^2-3a^2x+4a^3)$.

391. $-6a^2x^3(-3a^3b^2-4a^2b^2x+3ab^2x^2+4b^2x^3)$.

392. $4{,}3a^2b^2(3a^2b^2-2a^2x^2+0{,}6b^2x^2)$.

393. $-2b^2y(4b^{m-1}y-3b^{m-2}y^2-2b^{m-3}y^3)$.

394. $3a^{m+n-1}b^{n-m}(2a^{n-m+1}b^{m-n+1}-4a^{2m-n+1}b^{2m+n})$.

395. $4a^2b+3a(2ab-4a^2+b^2)$.

396. $4a^2b-3a(2ab-4a^2-b^2)$.

397. $5a^2x^3-4a^2b(3a^2-2ab+4b^2)$.

398. $7a^2x^4-3a^3x^3-4ax(2ax^3-3a^2x^2-4a^3x)$.

399. $2ab[4a^2-3a\ (2ab-3a^2-b^2)]$.

400. $-3a[-6a^4-4a^2(1-2a-3a^2)]$.

401. $[2a^2x^2+3ax(1-3a+4ax)] \cdot -3ab$.

402. $-4a^{n-3}\{1{,}12a^{2x-n+3}-\frac{3}{11}a^2[0{,}66a^{2x}-\frac{2}{5}a^{x+1}(1{,}65a^{x-1}-12{,}1a^{x-1})]\}$.

403. $(a+b) \cdot (c+d)$.

404. $(a-b) \cdot (c-d)$.

405. $(a+5) \cdot (a+3)$.

406. $(3a-\frac{1}{2}) \cdot (4a-5)$.

407. $(7a+b) \cdot (4a-3b)$.

408. $(5a^2+3ab) \cdot (4a^2-2ab)$.

409. $(4x^2y - 3ab) \cdot (0{,}2x^2y + 2ab)$.
410. $(0{,}2xy - 4ab) \cdot (3xy - 2ab)$.
411. $(x^{m-n} - 3y)(x^{m+n} + 4y^n)$.
412. $(6a^{m+1} - 4a^m)(8a^{m-1} + 3a)$.
413. $(4a^2 - 2a + 1)(2a - 1)$.
414. $(4a^2 - 3ab + 2b^2)(4a - b)$.
415. $(-3a + 2a^2 - 1)(1 - 2a)$.
416. $(4a^2b - 3b^3 + 2ab^2 + a^3)(2a - b)$.
417. $(a^4 - a^2 - 1)(a^2 - 1)$.
418. $(8a^5 - 3a^3 + 2)(4a^3 - 1)$.
419. $(6a^2b^3 - 3a^3b^2 + 4a^4b)(2a^m b - 3a^{m-1}b^2)$.
420. $(7{,}5a^2b - 2b^3 + 3a^3 + 8ab^2)(2a^3b^2 - 5a^2b^3)$.
421. $(0{,}8x^2y - 0{,}4xy^2 + x^3 + y^3)(5x^2 - 4y^2)$.
422. $(3a^2 - 2a + 1)(2a^2 + 4a - 3)$.
423. $(3a^2 + 2a + \frac{1}{3})(-6a + 1 + 9a^2)$.
424. $(8x^2 - 4xy + 3y^2)(2y^2 - 3xy + 3x^2)$.
425. $(6ab - 3b^2 + 3a^2)(2a^2 + 3b^2 - 2ab)$.
426. $(4a^2 + 3a - 1)^2$.
427. $(7a - 3a^2 + 2)^2$.
428. $(2 - 7a^2 - 3a^4)(5a - 3a^3 - 2a^5)$.
429. $(2a^2 - 3a^5 - 7a^8)(5a - 2a^4 - 2a^7)$.
430. $(4a^2b^3 - 3a^3b^2 - 2a^4b + 4a^5)(3a^2 - 2ab + 4b^2)$.
431. $(x^6 + x^5 - x^3 + x + 2)(x^2 - x + 1)$.
432. $(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)(x + y)$.
433. $(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)(x - y)$.
434. $(x^4 + x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)(x + y)$.
435. $(8x^6 - 4x^4y^2 + 2x^2y^4 - y^6)(2x^2 + y^2)$.
436. $(24a - 81a^4 + 16 + 54a^3)(9a^2 + 4 - 6a)$.
437. $(48a^4 - 10 - 4a^2 + 64a^6)(1 + 16a^4 - 12a^2)$.

Въ слѣдующихъ примѣрахъ найти произведенія сокращеннымъ способомъ:

438. $(x + y)^2$.
439. $(x - y)^2$.
440. $(x - 3)^2$.
441. $(2ab + 4)^2$.
442. $(4ab + 3a)^2$.
443. $(2a^2 + \frac{1}{2}b)^2$.
444. $(7x^2 - n^3)^2$.
445. $(4a^2 + 3a^n)^2$.
446. $(8a^{n-1} + 3b)^2$.
447. $(7a^2b^{n-1} - 4a^{n+1}b^2)^2$.
448. $[a + (b + c)]^2$.
449. $[(x - y) - z]^2$.
450. $[a - b(a - 1)]^2$.
451. $[a(a - 1) - a(1 - a)]^2$.
452. $[a(a + b) - 2a(b - a)]^2$.
453. $[4a^2(a - b) + 3b^2(a + b)]^2$.
454. $(a - x)(a + x)$.
455. $(a - 4)(a + 4)$.
456. $(3a^2b + 4ab^2)(3a^2b - 4ab^2)$.
457. $(4an - 2a^2x)(4an + 2a^2x)$.
458. $(6a^2 - 1)(6a^2 + 1)$.
459. $(7a^2 + 8b^2)(7a^2 - 8b^2)$.
460. $(x^5 + y^5)(x^5 - y^5)$.
461. $(a^2b^n + x)(a^2b^n - x)$.
462. $(-a + b)(-a - b)$.
463. $(-4x + 3)(-4x - 3)$.

464. $(-4ab^2-3a^2b)(-4ab^2+3a^2b)$.
465. $[(a+b)-c][(a+b)+c]$.
466. $[(a+b)+c][(a-(b+c)]$.
467. $(a^2-a+1)(a^2-a-1)$.
468. $(x^2+x+3)(x^2-x-3)$.
469. $(a+b+c)(a-b+c)$.
470. $(3x+2y-z)(z+2y-3x)$.
471. $(a^3+2a^2-5a)(a^3-2a^2-5a)$.
472. $(x-a)(x+a)(x^2+a^2)$.
473. $(x-a)(x+a)(x^2-a^2)$.
474. $(a+3)(a-3)(a^2+9)$.
475. $(a-3)(a+3)(a^2-9)$.
476. $(a+1)^3$.
477. $(a-4)^3$.
478. $(4a^2+3b)^3$.
479. $(4x^2y-6)^3$.

Примѣнить формулы замѣчательныхъ случаевъ умноженія въ слѣдующихъ числовыхъ примѣрахъ:

480. $43^2=(40+3)^2$.
481. 71^2.
482. 46^2.
483. 82^2.
484. $191^2=(190+1)^2$.
485. 171^2.
486. $23^3=(20+3)^3$.
487. 41^3.
488. 63^3.
489. 75^3.
490. 155^3.
491. 149^3.

ГЛАВА VI.

Алгебраическое дѣленіе.

§ 59. **Опредѣленія.** *Раздѣлить одно количество на другое значитъ найти такое третье количество, которое, будучи умножено на дѣлителя, дастъ въ произведеніи дѣлимое.*

Разсматривая дѣлимое, какъ извѣстное произведеніе; дѣлителя, какъ извѣстнаго множителя, — мы можемъ дать слѣдующее опредѣленіе дѣленію: *Дѣленіе есть такое дѣйствіе, посредствомъ котораго по данному произведенію и одному изъ двухъ производителей находится другой производитель.*

§ 60. **Дѣленіе количествъ. Правило знаковъ. 1)** Пусть требуется раздѣлить $+12$ на $+3$. Такъ какъ дѣлимое должно равняться дѣлителю, помноженному на частное, то $(+12):(+3)=+4$, потому что $(+3).(+4)=+12$.

Точно такъ же:

2) $(-12):(+3)=-4$, потому что $(+3).(-4)=-12$,
3) $(+12):(-3)=-4$, потому что $(-3).(-4)=+12$,
4) $(-12):(-3)=+4$, потому что $(-3).(+4)=-12$.

Изъ этихъ примѣровъ видимъ, что частное будетъ *положительное,* если дѣлимое и дѣлитель имѣютъ одинаковые знаки, и *отрицательное,* если дѣлимое и дѣлитель имѣютъ знаки разные.

Правило: *Чтобы раздѣлить одно количество на другое, надо абсолютную величину дѣлимаго раздѣлить на абсолютную величину дѣлителя и въ частномъ поставить знакъ +, если дѣлимое и дѣлитель имѣютъ знаки одинаковые, и знакъ —, если дѣлимое и дѣлитель имѣютъ знаки разные.*

Слѣдствія. 1) Если мы въ дѣлимомъ или дѣлителѣ перемѣнимъ знакъ, то знакъ частнаго тоже измѣнится.

2) Если мы перемѣнимъ знаки въ дѣлимомъ и дѣлителѣ, то знакъ частнаго не измѣнится.

§ 61. **Дѣленіе буквенныхъ количествъ.** При дѣленіи буквенныхъ количествъ, а также при дѣленіи одночленныхъ или многочленныхъ выраженій самого дѣйствія выполнить нельзя; частное въ этихъ случаяхъ обыкновенно изображается въ видѣ дроби, числителемъ которой ставится данное дѣлимое, а знаменателемъ — дѣлитель. Такъ:

1) $a : b = \frac{a}{b}$; 2) $(-3a) : (+4b) = -\frac{3a}{4b}$; 3) $(a^2 + b^2) : (a + b) = \frac{a^2+b^2}{a+b}$.

Впрочемъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ частнымъ можетъ быть цѣлое алгебраическое выраженіе. Разсмотримъ эти случаи.

§ 62. **Правило показателей степени.** Пусть требуется раздѣлить a^7 на a^2. Такъ какъ дѣлимое равно дѣлителю, помноженному на частное, то

$$a^7 : a^2 = a^5,$$

потому что $a^2 \cdot a^5 = a^7$. Но $a^5 = a^{7-2}$. На основаніи этого мы выводимъ **правило:** *Чтобы раздѣлить степени одного и того же количества, надо показателя дѣлителя вычесть изъ показателя дѣлимаго.*

Примѣры: 1) $x^{10} : x^3 = x^7$. 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$.
3) $z^{m+n} : z^{m-n} = z^{(m+n)-(m-n)} = z^{2n}$.

§ 63. **Нулевой показатель.** Пусть требуется раздѣлить a^3 на a^3. Вычтя показателя дѣлителя изъ показателя дѣлимаго, получимъ:

$$a^3 : a^3 = a^0.$$

Выраженіе a^0 само по себѣ не имѣетъ никакого смысла, потому что нельзя количество a взять множителемъ *нуль* разъ;

но такъ какъ частное отъ дѣленія a^3 на a^3 равно единицѣ, то условились всякое выраженіе съ нулевымъ показателемъ принимать за единицу. Такъ, $a^0 = 1$; $4^0 = 1$; $(a-b)^0 = 1$ и т. п.

На основаніи сказаннаго иногда при расположеніи многочлена по степенямъ къ тому члену, который не имѣетъ главной буквы, приписываютъ эту букву съ нулевымъ показателемъ, что равносильно умноженію этого члена на 1. Напр., многочленъ: $3x^2-2x+2$ можно записать также $3x^2-2x+2x^0$.

§ **64.** Пусть :ано раздѣлить a^3 на a^7. — Поступая по указаннымъ въ § 62 правиламъ, получимъ:

$$a^3 : a^7 = a^{3-7} = a^{-4}.$$

Выраженіе a^{-4} само по себѣ не имѣетъ никакого смысла; поэтому, въ данномъ случаѣ частное надо написать въ видѣ дроби:

$$a^3 : a^7 = \frac{a^3}{a^7}.$$

Примѣчаніе. Значеніе отрицательныхъ показателей см. ниже (§ 103).

§ **65. Дѣленіе одночленовъ.** Пусть требуется раздѣлить одночленъ $18a^5b^2c^7$ на одночленъ $6a^2c^3$.

Такъ какъ частное, умноженное на дѣлителя, дастъ дѣлимое, то коэффиціентъ его (частнаго) долженъ быть таковъ, чтобы отъ умноженія его на 6 получилось 18. Слѣдовательно, чтобы найти коэф. частнаго, надо 18 раздѣлить на 6, — получится 3. Далѣе, основываясь на теоремахъ 7 и 8 (§ 29), получимъ, что искомое частное равно:

$$18a^5b^2c^7 : 6a^2c^3 = 3(a^5 : a^2)b^2(c^7 : c^3) = 3a^{5-2}b^2c^{7-3} = 3a^3b^2c^4.$$

Чтобы убѣдиться въ вѣрности найденнаго частнаго, помножимъ дѣлителя на частное, — получимъ:

$$6a^2c^3 \cdot 3a^3b^2c^4 = 18a^5b^2c^7.$$

Отсюда выводимъ **правило:** *Чтобы раздѣлить одночленъ на одночленъ, надо коэффиціентъ дѣлимаго раздѣлить на коэф. дѣлителя; показателей степеней буквъ дѣлителя вычесть изъ показателей одинаковыхъ буквъ дѣлимаго, и тѣ буквы дѣлимаго, которыхъ нѣтъ въ дѣлителѣ, перенести безъ измѣненія въ частное; при этомъ надо соблюдать правило знаковъ.*

Примѣры: 1) $-14a^5b^2c^3 : 2a^5b = -7a^0bc^3 = -7bc^3$.
2) $-18ax^ny^m : -3xy^2 = 6ax^{n-1}y^{m-2}$.

3) $8(a+b)^6 : 12(a+b)^2 = \frac{8}{12}(a+b)^4 = \frac{2}{3}(a+b)^4$.
4) $9a^{m+2}b^{n-3} : 4a^{m-2}b^{n-p} = 2\frac{1}{4}a^{(m+2)-(m-2)}b^{(n-3)-(n-p)} =$
$= 2\frac{1}{4}a^4b^{p-3}$.

§ 66. Невозможно получить цѣлаго частнаго въ слѣдующихъ случаяхъ: 1) если показатель какой-либо буквы дѣлимаго меньше показателя той же буквы дѣлителя и 2) если въ дѣлителѣ есть такія буквы, которыхъ въ дѣлимомъ нѣтъ. Во всѣхъ этихъ случаяхъ частное изображается въ видѣ дроби. Напр.:

$$1)\ 4a^2b : 2ab^2 = \frac{4a^2b}{2ab^2}.$$

$$2)\ 30a^2b^2 : 6abc = \frac{30a^2b^2}{6abc}.$$

§ 67. **Дѣленіе многочлена на одночленъ.** Намъ уже извѣстно (§ 51), что для умноженія многочлена на одночленъ надо каждый членъ многочлена помножить на одночленъ. Такъ какъ дѣленіе есть дѣйствіе, обратное умноженію, то отсюда заключаемъ, что для раздѣленія многочлена на одночленъ надо каждый членъ дѣлимаго раздѣлить на одночленнаго дѣлителя, соблюдая при этомъ правило знаковъ.

Примѣры: 1) $(8a^3x^2 - 12a^2x^3 + 16ax^4) : 4ax^2 = 2a^2 - 3ax + 4x^2$.
2) $(-25a^5x^2 + 15a^4x^3 - 35a^3x^4) : -5a^2x^2 =$
$= 5a^3 - 3a^2x + 7ax^2$.
3) $(8a^2 - 3a^3 - 4a^4) : 3a = \frac{8}{3}a - a^2 - \frac{4}{3}a^3$.

§ 68. **Дѣленіе одночлена на многочленъ.** При дѣленіи одночлена на многочленъ частное всегда изображается въ видѣ дроби. Такъ,

$$6a^2b : (2a+3b) = \frac{6a^2b}{2a+3b}.$$

Легко доказать, что въ этомъ случаѣ нельзя получить въ частномъ цѣлаго выраженія. Въ самомъ дѣлѣ: если бы частное представляло цѣлый одночленъ или цѣлый многочленъ, то, помноживъ его на многочленнаго дѣлителя, надо получить одночленъ. Но это невозможно, потому что отъ умноженія многочлена на одночленъ въ произведеніи получится многочленъ, въ которомъ число членовъ будетъ равно числу членовъ многочленнаго дѣлителя; отъ умноженія же многочлена на многочленъ въ произведеніи получится тоже многочленъ, который не можетъ имѣть менѣе двухъ членовъ (§ 56).

§ 69. **Дѣленіе многочлена на многочленъ.** Пусть требуется раздѣлить многочленъ:

$$21a^2 - 19a - 23a^3 - 15 + 12a^4 \text{ на } 5 - 2a + 3a^2.$$

Прежде, чѣмъ приступить къ нахожденію частнаго, расположимъ члены дѣлимаго и дѣлителя по убывающимъ степенямъ буквы a. Затѣмъ напишемъ дѣлимое и дѣлителя такимъ образомъ, какъ пишутся при дѣленіи цѣлыя многозначныя числа, т.-е. съ правой стороны дѣлимаго проведемъ вертикальную черту и за нею напишемъ дѣлителя; подъ дѣлителемъ проведемъ горизонтальную черту, подъ которою будемъ писать частное.

Расположеніе дѣйствія:

$$\begin{array}{lrrrrr|l}
 & 12a^4 & -23a^3 & +21a^2 & -19a & -15 & 3a^2-2a+5 \\
 & -12a^4 & \mp 8a^3 & \pm 20a^2 & & & \overline{4a^2-5a-3} \\
\hline
\text{1-ый ост.} & " & -15a^3 & +a^2 & -19a & -15 & \\
 & & \mp 15a^3 & \pm 10a^2 & \mp 25a & & \\
\hline
\text{2-й ост.} & & " & -9a^2 & +6a & -15 & \\
 & & & \mp 9a^2 & \pm 6a & \mp 15 & \\
\hline
\text{3-й ост.} & & & \ldots\ldots & & 0. &
\end{array}$$

Теперь предположимъ, что искомое частное представляетъ нѣкоторый многочленъ, у котораго члены также расположены по убывающимъ степенямъ буквы a.

Такъ какъ дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное, — то и высшій членъ дѣлимаго долженъ равняться произведенію высшаго члена дѣлителя на высшій членъ частнаго (§ 55, 2). Слѣдовательно, чтобы найти высшій членъ частнаго, надо высшій членъ дѣлимаго ($12a^4$) раздѣлить на высшій членъ дѣлителя ($3a^2$); получимъ $4a^2$.

Умножимъ теперь найденный членъ частнаго на всѣ члены дѣлителя и полученное произведеніе $12a^4 - 8a^3 + 20a^2$ отнимемъ отъ дѣлимаго. Для этого надо 1) подписать его подъ дѣлимымъ такъ, чтобы подобные члены стояли подъ подобными, 2) затѣмъ, у членовъ произведенія перемѣнить знаки на обратные и 3) сдѣлать приведеніе. Получимъ послѣ вычитанія первый остатокъ: $-15a^3 + a^2 - 19a - 15$.

Такъ какъ дѣлимое содержитъ произведеніе всѣхъ членовъ дѣлителя на всѣ члены частнаго, и мы изъ дѣлимаго вычли уже произведеніе дѣлителя на первый членъ частнаго, то отсюда заключаемъ, что въ первомъ остаткѣ содержится произведеніе дѣлителя на остальные члены частнаго. Слѣдовательно, высшій членъ перваго остатка ($-15a^3$) долженъ равняться произведенію высшаго члена дѣлителя ($3a^2$) на высшій изъ остальныхъ членовъ искомаго частнаго.

На основаніи этого заключаемъ: чтобы найти второй членъ частнаго, надо: $-15a^3$ раздѣлить на $3a^2$; получимъ: $-5a$.

Умноживъ: $-5a$ на дѣлителя и вычтя произведеніе изъ перваго остатка, получимъ: $-9a^2+6a-15$, — второй остатокъ.

Чтобы найти третій членъ частнаго, надо: $-9a^2$ раздѣлить на $3a^2$; получимъ -3. Умножимъ найденный членъ на дѣлителя и вычтя произведеніе изъ второго остатка, получимъ въ остаткѣ нуль. Слѣдовательно, искомое частное равно $4a^2-5a-3$.

Можно также при дѣленіи многочленовъ дѣлимое и дѣлителя располагать по возрастающимъ степенямъ главной буквы. Тогда отъ дѣленія низшаго члена дѣлимаго на низшій членъ дѣлителя получится низшій членъ частнаго; слѣдовательно, первый членъ частнаго будетъ низшій. Второй, третій и т. д. члены получаются попредыдущему.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
-15 & -19a & +21a^2 & -23a^3 & +12a^4 & 5-2a+3a^2 \\
\mp 15 & \pm 6a & \mp 9a^2 & & & \overline{-3-5a+4a^2} \\
\hline
„ & -25a & +30a^2 & -23a^3 & +12a^4 & \\
 & \mp 25a & \pm 10a^2 & \mp 15a^3 & & \\
\hline
 & „ & 20a^2 & -8a^3 & +12a^4 & \\
 & & -20a^2 & \mp 8a^3 & \pm 12a^4 & \\
\hline
 & & & 0. & &
\end{array}$$

На основаніи сказаннаго выводимъ слѣдующее **правило:**

Чтобы раздѣлить одинъ многочленъ на другой, надо сначала расположить члены ихъ по убывающимъ или возрастающимъ степенямъ главной буквы; затѣмъ первый членъ дѣлимаго надо раздѣлить на первый членъ дѣлителя, — получимъ первый членъ частнаго; умноживъ первый членъ частнаго на дѣлителя и вычтя полученное произведеніе изъ дѣлимаго, — получимъ первый остатокъ. Далѣе, чтобы найти второй членъ частнаго, надо первый членъ остатка раздѣлить на первый членъ дѣлителя; второй членъ частнаго также надо умножить на дѣлителя и произведеніе отнять отъ перваго остатка; получится второй остатокъ, первый членъ котораго надо раздѣлить на первый членъ дѣлителя для полученія новаго члена частнаго и т. д.

Примѣры:

1)
$$\begin{array}{rrrrrr|l}
49a^2x^4 & „ & -2a^4x^2 & +27a^5x & -20a^6 & & 7ax^2+3a^2x-4a^3 \\
-49a^2x^4 & \pm 21a^3x^3 & \mp 28a^4x^2 & & & & \overline{7ax^2-3a^2x+5a^3} \\
\hline
„ & -21a^3x^3 & +26a^4x^2 & +27a^5x & -20a^6 & & \\
 & \mp 21a^3x^3 & \mp 9a^4x^2 & \pm 12a^5x & & & \\
\hline
 & „ & 35a^4x^2 & +15a^5x & -20a^6 & & \\
 & & -35a^4x^2 & \pm 15a^5x & \mp 20a^6 & & \\
\hline
 & & & 0. & & &
\end{array}$$

$$2)\quad \begin{array}{r|l} \frac{3}{4}a^4 + 1\frac{5}{12}a^3 - 6\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a + 4 & \frac{3}{4}a^2 - \frac{5}{6}a - 1 \\ \underline{-\frac{3}{4}a^4 \mp \frac{5}{6}a^3 \mp a^2 \qquad\qquad\quad} & \overline{a^2 + 3a - 4} \\ ,, \quad 2\frac{1}{4}a^3 - 5\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a + 4 & \\ \underline{-2\frac{1}{4}a^3 \mp 2\frac{1}{2}a^2 \mp 3a \qquad} & \\ ,, \quad - 3\,a^2 + 3\frac{1}{3}a + 4 & \\ \underline{\mp 3\,a^2 \pm 3\frac{1}{3}a \pm 4} & \\ 0. & \end{array}$$

§ **70**. Не всегда, понятно, можетъ совершиться дѣленіе многочленовъ безъ остатка. Напротивъ, большею частью получается остатокъ. Напр.:

$$\begin{array}{r|l} 6a^2 + 5a + 2 & 2a - 1 \\ \underline{-6a^2 \mp 3a \qquad} & \overline{3a + 4} \\ ,, \quad 8a + 2 & \\ \underline{-8a \mp 4} & \\ ,, \quad 6. & \end{array}$$

Въ этомъ примѣрѣ второй остатокъ 6 не дѣлится на первый членъ дѣлителя, поэтому дѣленія продолжать невозможно.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда дѣленіе не можетъ совершиться безъ остатка, частное, какъ уже намъ извѣстно, записывается въ видѣ дроби, при чемъ дѣлимое ставится числителемъ, а дѣлитель — знаменателемъ. — Иногда же частное въ этихъ случаяхъ записываютъ такъ: прежде пишутъ полученное цѣлое частное и затѣмъ къ нему прибавляютъ дробь, числитель которой равенъ остатку отъ дѣленія, а знаменателемъ служитъ данный дѣлитель. Поэтому, частное отъ дѣленія предыдущихъ многочленовъ можно записать такъ:

$$(6a^2 + 5a + 2) : (2a - 1) = \frac{6a^2 + 5a + 2}{2a - 1}$$

или

$$(6a^2 + 5a + 2) : (2a - 1) = 3a + 4 + \frac{6}{2a - 1}.$$

Чтобы доказать, что частное отъ дѣленія многочленовъ можно записать вторымъ способомъ, разсуждаемъ такъ: пусть отъ дѣленія многочлена A на многочленъ B мы получили частное Q и остатокъ R. Тогда, на основаніи свойствъ дѣлимаго (дѣлимое равно дѣлителю, помноженному на частное, плюсъ остатокъ) имѣемъ равенство:

$$A = B \cdot Q + R.$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на B, получимъ:

$$A : B = (B \cdot Q + R) : B = Q + \frac{R}{B}, \text{ —}$$

что и требовалось доказать.

§ **71. Признаки дѣлимости многочленовъ.** Есть нѣкоторые признаки, по которымъ можно узнать, не производя дѣйствія, совершится ли дѣленіе многочленовъ безъ остатка.

1) *Дѣленіе не можетъ совершиться безъ остатка, если высшій или низшій члены дѣлимаго соотвѣтственно не дѣлятся на высшій и низшій членъ дѣлителя.* Такъ, многочленъ: $3a^3 - 2a^2b - 3ab^2$ не раздѣлится безъ остатка на двучленъ: $3a^4 - b$, потому что $3a^3$ не дѣлится на $3a^4$.

2) *Дѣленіе не можетъ совершиться безъ остатка, если въ дѣлителѣ есть такія буквы, которыхъ въ дѣлимомъ нѣтъ.* Такъ, многочленъ: $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ не раздѣлится на $a^2 - bc + b^2$, потому что въ дѣлителѣ есть буква c, которой нѣтъ въ дѣлимомъ.

§ **72.** Когда же данные для раздѣленія многочлены не представляютъ ни одного изъ указанныхъ признаковъ, то, чтобы судить о ихъ дѣлимости, надо приступить къ самому дѣленію. Продолжая это дѣйствіе достаточно далеко, мы всегда можемъ узнать, совершится ли дѣленіе безъ остатка или нѣтъ. При этомъ, надо различать два случая:

I случай. *Дѣлимое и дѣлитель расположены по убывающимъ степенямъ главной буквы.*

Въ этомъ случаѣ показатели главной буквы въ остаткахъ постоянно уменьшаются, поэтому мы можемъ дойти до такого остатка, высшій членъ котораго не раздѣлится на высшій членъ дѣлителя (см. § 70). Это и служитъ признакомъ, что дѣленіе не можетъ совершиться безъ остатка.

II случай. *Дѣлимое и дѣлитель расположены по возрастающимъ степенямъ главной буквы.*

Въ этомъ случаѣ показатели главной буквы въ остаткахъ идутъ, постоянно возрастая. Поэтому, мы никогда не можемъ получить такого остатка, первый членъ котораго не раздѣлился бы на первый членъ дѣлителя. Чтобы открыть признакъ дѣлимости въ этомъ случаѣ, опредѣляютъ заранѣе показателя главной буквы послѣдняго члена частнаго. Затѣмъ производятъ дѣленіе до тѣхъ поръ, пока въ частномъ не получится членъ, у котораго показатель главной буквы равенъ показателю вычисленнаго

послѣдняго члена. Если въ этомъ случаѣ получится остатокъ, то дѣленіе невозможно. Напр.:

$$
\begin{array}{l|l}
4 - 3a + 2a^2 - 4a^3 + 2a^4 & 1 - a + 2a^2 \\
\underline{-4 \mp 4a \pm 8a^2} & \overline{4 + a - 5a^2} \\
\quad ,, \quad a - 6a^2 - 4a^3 + 2a^4 & \\
\quad \underline{- a \mp a^2 \pm 2a^3} & \\
\qquad ,, \quad - 5a^2 - 6a^3 + 2a^4 & \\
\qquad \underline{\mp 5a^2 \pm 5a^3 \mp 10a^4} & \\
\qquad\quad ,, \quad -11a^3 + 12a^4. &
\end{array}
$$

Такъ какъ послѣдній членъ частнаго въ этомъ примѣрѣ можетъ содержать главную букву только во второй степени, то заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Примѣчаніе. Очевидно, что при расположеніи дѣлимаго и дѣлителя по возрастающимъ степенямъ, въ случаѣ недѣлимости многочленовъ, можно продолжать дѣйствіе до безконечности. Покажемъ это на предыдущемъ примѣрѣ:

$$
\begin{array}{l|l}
4 - 3a + 2a^2 - 4a^3 + 2a^4 & 1 - a + 2a^2 \\
\underline{-4 \mp 4a \pm 8a^2} & \overline{4 + a - 5a^2 - 11a^3 + a^4 \ldots} \\
\quad ,, \quad a - 6a^2 - 4a^3 + 2a^4 & \\
\quad \underline{- a \mp a^2 \pm 2a^3} & \\
\qquad ,, \quad - 5a^2 - 6a^3 + 2a^4 & \\
\qquad \underline{\mp 5a^2 \pm 5a^3 \mp 10a^4} & \\
\qquad\quad ,, \quad -11a^3 + 12a^4 & \\
\qquad\quad \underline{\mp 11a^3 \pm 11a^4 \mp 22a^5} & \\
\qquad\qquad ,, \quad + a^4 + 22a^5 & \\
\qquad\qquad \underline{- a^4 \mp a^5 \pm 2a^6} & \\
\qquad\qquad\quad ,, \quad 23a^5 - 2a^6. &
\end{array}
$$

Въ этомъ случаѣ частное можно вычислить съ произвольнымъ числомъ членовъ и затѣмъ къ нему прибавить дробь, числитель которой равенъ остатку, а знаменателемъ служитъ дѣлитель. Такъ,

$$(4 - 3a + 2a^2 - 4a^3 + 2a^4) : (1 - a + 2a^2) =$$
$$= 4 + a - 5a^2 - 11a^3 + a^4 + \frac{23a^5 - 2a^6}{1 - a + 2a^2}.$$

§ 73. **Замѣчательные случаи дѣленія.** При дѣленіи многочленовъ, какъ и при умноженіи, встрѣчается нѣсколько замѣ-

чательныхъ случаевъ, которые полезно твердо запомнить, такъ какъ они часто употребляются при преобразованіи различныхъ многочленныхъ выраженій.

I случай. *Разность одинаковыхъ степеней двухъ количествъ всегда дѣлится безъ остатка на разность тѣхъ же количествъ.* Напр.:

$$\begin{array}{r|l}
a^5 - b^5 & a - b \\
\underline{-a^5 \mp a^4b} & a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \\
,,\quad a^4b - b^5 & \\
\underline{-a^4b \mp a^3b^2} & \\
,,\quad a^3b^2 - b^5 & \\
\underline{-a^3b^2 \mp a^2b^3} & \\
,,\quad a^2b^3 - b^5 & \\
\underline{-a^2b^3 \mp ab^4} & \\
,,\quad ab^4 - b^5 & \\
\underline{-ab^4 \mp b^5} & \\
0. &
\end{array}$$

II случай. *Разность одинаковыхъ степеней двухъ количествъ дѣлится на сумму этихъ количествъ лишь въ томъ случаѣ, когда эти степени четныя.* Напр.:

$$\begin{array}{r|l}
a^4 - b^4 & a + b \\
\underline{-a^4 \pm a^3b} & a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 \\
,,\quad -a^3b - b^4 & \\
\underline{\mp a^3b \mp a^2b^2} & \\
,,\quad a^2b^2 - b^4 & \\
\underline{-a^2b^2 \pm ab^3} & \\
,,\quad -ab^3 - b^4 & \\
\underline{\mp ab^3 \mp b^4} & \\
0. &
\end{array}$$

III случай. *Сумма одинаковыхъ степеней двухъ количествъ дѣлится на сумму этихъ количествъ лишь въ томъ случаѣ, когда степени нечетныя.* Напр.:

$$\begin{array}{r|l}
a^3 + b^3 & a + b \\
\underline{-a^3 \pm a^2b} & a^2 - ab + b^2 \\
,,\quad -a^2b + b^3 & \\
\underline{\mp a^2b \mp ab^2} & \\
,,\quad ab^2 + b^3 & \\
\underline{-ab^2 \pm b^3} & \\
0. &
\end{array}$$

Легко замѣтить, какъ пишутся частныя во всѣхъ этихъ случаяхъ. Именно: показатели первой буквы постоянно уменьшаются на единицу, а второй увеличиваются; что же касается знаковъ, то въ первомъ случаѣ всѣ члены частнаго положительные, а во второмъ и третьемъ положительные и отрицательные члены чередуются.

Зная эти формулы, легко можно писать въ нѣкоторыхъ случаяхъ частное, не совершая самого дѣйствія. Покажемъ это на примѣрахъ.

1) $(x^4 - 1) : (x - 1) = (x^4 - 1^4) : (x - 1) = x^3 + x^2 \cdot 1 + x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + x^2 + x + 1.$

2) $(27a^3 + 64b^6) : (3a + 4b^2).$

Такъ какъ $27a^3 = (3a)^3$ и $64b^6 = (4b^2)^3$, то на основаніи третьяго замѣчательнаго случая имѣемъ:

$$(27a^3 + 64b^6) : (3a + 4b^2) = [(3a)^3 + (4b^2)^3] : (3a + 4b^2) = (3a)^2 - 3a \cdot 4b^2 + (4b^2)^2 = 9a^2 - 12ab^2 + 16b^4.$$

3) $(32a^{5m} - 3125b^{5n}) : (2a^m - 5b^n) = [(2a^m)^5 - (5b^n)^5] : (2a^m - 5b^n) = (2a^m)^4 + (2a^m)^3 \cdot 5b^n + (2a^m)^2(5b^n)^2 + 2a^m \cdot (5b^n)^3 + (5b^n)^4 = (16a^{4m} + 40a^{3m}b^n + 100a^{2m}b^{2n} + 250a^m b^{3n} + 625b^{4n}.$

§ **74.** Докажемъ теперь въ общемъ видѣ справедливость предыдущихъ формулъ. Это доказательство основывается на слѣдующемъ свойствѣ многочленовъ.

Теорема. *Если многочленъ* $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Ux + V$, *члены котораго расположены по убывающимъ степенямъ буквы* x, *станемъ дѣлить на* $x - a$, *то въ остаткѣ получится:*

$$Aa^n + Ba^{n-1} + Ca^{n-2} + \ldots + Ua + V,$$

т.-е. въ остаткѣ получится такой же многочленъ, но въ которомъ количество x *замѣнено черезъ* a.

Чтобы доказать справедливость этого свойства, допустимъ, что отъ дѣленія вышеозначеннаго многочлена на $x - a$ получилось извѣстное частное, которое мы для краткости обозначимъ черезъ Q, и остатокъ какой-нибудь R. Очевидно, что въ остаткѣ R ни одинъ членъ не можетъ содержать x, потому что въ противномъ случаѣ можно было бы продолжить дѣленіе. На основаніи того, что дѣлимое равно дѣлителю, помноженному на частное, плюсъ остатокъ, имѣемъ равенство:

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Ux + V = (x - a)\,Q + R.$$

Это равенство справедливо при всевозможныхъ значеніяхъ x; т.-е. здѣсь вмѣсто x можно поставить какое угодно коли-

чество, и равенство не нарушится. Замѣнимъ x черезъ a; тогда у насъ получится равенство:

$$Aa^n + Ba^{n-1} + Ca^{n-2} + \ldots + Ua + V = (a - a)\,Q + R.$$

Но выраженіе: $(a—a)\,Q$ равно нулю, потому что $a—a=0$; слѣдовательно,

$$Aa^n + Ba^{n-1} + Ca^{n-2} + \ldots Ua + V = R, —$$

что и требовалось доказать.

Въ справедливости этого свойства можно убѣдиться непосредственнымъ дѣленіемъ. Напр.:

1) $Ax^2 + Bx + C \mid x - a$

$-Ax^2 \mp Aax \quad \mid Ax + (Aa + B)$

„ $(Aa + B)\,x + C$

$-(Aa + B)\,x \mp (Aa + B)a$

Остатокъ $= (Aa + B)\,a + C = Aa^2 + Ba + C.$

2) $Ax^3 - Bx + C \mid x - a$

$-Ax^3 \mp Aax^2 \quad \mid Ax^2 + Aax + (Aa^2 - B)$

„ $Aax^2 - Bx + C$

$-Aax^2 \mp Aa^2x$

„ $(Aa^2 - B)\,x + C$

$-(Aa^2 - B)\,x \mp (Aa^2 - B)a$

Остатокъ $= (Aa^2 - B)\,a + C = Aa^3 - Ba + C.$

§ 75. Изъ предыдущей теоремы вытекаетъ:

Если остатокъ $Aa^n + Ba^{n-1} + Ca^{n-2} + \ldots + Ua + V$ равенъ нулю, то данный многочленъ дѣлится нацѣло на x — a.

§ 76. На основаніи всего вышесказаннаго мы можемъ вывести слѣдующій признакъ дѣлимости:

Всякій многочленъ раздѣлится безъ остатка на разность, полученную отъ вычитанія какого-нибудь количества изъ главной буквы, если этотъ многочленъ обращается въ нуль при замѣнѣ главной буквы этимъ количествомъ.

Такъ, многочленъ: $2a^2 + ab - 3b^2$ раздѣлится на $a - b$, потому что онъ обращается въ нуль, если мы замѣнимъ a черезъ b.

Сдѣлаемъ это:

$$2b^2 + b^2 - 3b^2 = 0.$$

Многочленъ: $x^2 + 9x + 14$ дѣлится на: $x + 2 = x - (-2)$, потому что онъ обращается въ нуль, если вмѣсто x поставимъ въ немъ: -2.

$$(-2)^2 + (9 . -2) + 14 = 4 - 18 + 14 = 0.$$

Точно такъ же многочленъ: $3a^3 + 7a^2 - 4a + 6$ дѣлится на $a - (-3) = a + 3$, такъ какъ онъ обращается въ нуль, если вмѣсто a поставимъ въ немъ: -3.

$$3 . (-3)^3 + 7 . (-3)^2 - 4 . (-3) + 6 = -81 + 63 + 12 + 6 = 0.$$

§ 77. Замѣтивъ свойство, указанное въ предыдущемъ параграфѣ, легко доказать справедливость формулъ § 73.

1) $a^m - b^m$ всегда дѣлится на $a - b$ безъ остатка, потому что дѣлимое обращается въ нуль, если количестве a замѣнить въ немъ черезъ b:

$$b^m - b^m = 0.$$

2) $a^m - b^m$ раздѣлится на $a+b=a-(-b)$ лишь въ томъ случаѣ, если m есть четное число, потому что выраженіе: $(-b)^m - b^m$ обратится тогда въ нуль.

Въ самомъ дѣлѣ, $(-b)^m = b^m$ (§ 45, 2), если m есть четное число. Слѣдовательно, $(-b)^m - b^m = b^m - b^m = 0$.

3) $a^m + b^m$ раздѣлится на $a + b = a - (-b)$ лишь въ томъ случаѣ, если m есть нечетное число, потому что выраженіе: $(-b)^m + b^m$ обратится тогда въ нуль.

Въ самомъ дѣлѣ, если m число нечетное, то $(-b)^m = -b^m$ (§ 45, 2). Слѣдовательно, $(-b)^m + b^m = -b^m + b^m = 0$.

Кромѣ того, легко видѣть, что сумма одинаковыхъ степеней двухъ количествъ никогда не дѣлится на разность этихъ количествъ, потому что выраженіе $a^m + b^m$ не можетъ обратиться въ нуль при замѣнѣ a количествомъ b:

$$b^m + b^m = 2b^m,$$

т.-е. всегда получимъ остатокъ, равный удвоенному послѣднему члену. Напр.:

$$\begin{array}{r|l} a^3 + b^3 & a - b \\ \underline{-a^3 \mp a^2b} & a^2 + ab + b^2 \\ ,,\quad a^2b + b^3 & \\ \underline{-a^2b \mp ab^2} & \\ ,,\quad ab^2 + b^3 & \\ \underline{-ab^2 \mp b^3} & \\ ,,\quad 2b^3. & \end{array}$$

Задачи.

492. $(+16) : (+5)$.
493. $(-0,46) : (+23)$.
494. $(-48) : (+7)$.
495. $(-6,4) : (-0,8)$.
496. $(+a) : (+b)$.
497. $(-a) : (+b)$.
498. $(+x) : (-y)$.
499. $(-x) : (-y)$.
500. $4a : 2$.
501. $-4ab^2 : -6$.
502. $3ax : 8$.
503. $-8a^2x : -3$.
504. $a^7 : a^5$.
505. $x^8 : x^2$.
506. $a^8 : a$.
507. $a^5 : a^5$.
508. $a^8 : a^7$.
509. $m^3 : m^5$.
510. $a^m : a^n$.
511. $x^{p+1} : x^2$.
512. $-a^n : a$.
513. $-x^{n+2} : -x^{n-1}$.
514. $a^{y-2x-1} : a^{y-4x+3}$.
515. $b^{2+m+n} : b^{n-m+4}$.
516. $36a^3b^2 : 4ab^2$.
517. $0,72a^4b^2x : 0,8ab^2x$.
518. $\frac{1}{2}a^4b^2x^3 : 4ab^2x^2$.
519. $-0,36a^3b^2m^4 : -4am^2$.
520. $-6a^nb^2x^m : abx^n$.
521. $8a^n b^m : 4a^m b^n$.
522. $8ab^2(x-y)^4 : 2ab(x-y)^2$.
523. $-6x^m (x+y)^n : -4x(x+y)$.
524. $a^2b^{m+n-1} : \frac{1}{3}ab^{2m-n-4}$.
525. $a^2b^{m-n+x} : 0,4ab^{x-m+n}$.
526. $a^2b : a^3;\ bc : cd$.
527. $a^3x^3 : -ax^4;\ abc : ax$.
528. $(4a^4-6a^3b+2a^2b^2) : 2a$.
529. $(8a^3x^2-4a^3x^3+12ax^4) : (-4ax^2)$.
530. $(3a^2b+4x^2b-3ab^2) : b$.
531. $(-3a^2b^2x-2a^2bx^2+4a^2b^2x^3) : (-a^2b)$.
532. $-(20a^2-16a^3+12a^4) : 4a^2$.
533. $-(30x^4-12x^3a+6x^2a^2) : (-6x^2)$.
534. $(a^2b^2x^2-ab^3x^2+4a^2bx^3) : abx$.
535. $(-a^3b^2x-4ab^3x^2+4a^2bx^3) : (-abx)$.
536. $(4a^4-3a^3+2a^2-3a) : 2a$.
537. $(-7x^2-3x^3+4x^4) : (-3x^2)$.
538. $(6a^2b^2x^4-4a^3b^3x^2+2a^3b^4x) : 4a^2b^2x$.
539. $(-3a^2x^2y^5-2a^4x^3y+3a^3x^2y) : (-2a^2x^2y)$.
540. $(0,4a^5b^3-0,8a^4b^4+0,6a^3b^5) : 2a^2b^3$.
541. $(-0,8x^6-0,4x^5y+2\frac{1}{2}x^4y^2) : (-0,4x^4)$.
542. $2\frac{1}{2}a^2p^2-3\frac{1}{2}a^2m^2+4\frac{1}{4}a^2n^2) : 3a^2$.
543. $(6a^m-8a^{m-1}+4a^{m-2}) : 2a^2$.
544. $(7a^{m+8}-3a^{m+6}+4a^{m+4}) : 4a^{m-1}$.
545. $(0,4x^m y^n+0,28x^{m+1}y^{n-1}-0,36x^{m+2}y^{n-2}) : 4x^m y^{n-2}$.
546. $[(a+b)^8-(a+b)^5+(a+b)^8] : (a+b)^8$.
547. $[5(x-y)^m+10(x-y)^{m+1}+15(x-y)^{m+2}+20(x-y)^{m+3}] : 5(x-y)^m$.
548. $4a : (2a+1)$.
549. $3ab : (a^2-ab+b^2)$.
550. $6xy : (x+y)$.
551. $a^2b^2 : (a^2+b^2)$.
552. $(a^2+ab-6b^2) : (a+3b)$.
553. $(x^2+63-16x) : (x-9)$.
554. $(a^2-a-12) : (a+3)$.
555. $(a^3-a^2b-3ab+3b^2) : (a^2-3b)$.
556. $(x^3+5x^2-x-5) : (x^2-1)$.
557. $(12a^2+2ab-2b^2) : (3a-b)$.

558. $(28a^2 + 17ax - 3x^2) : (4a + 3x)$.
559. $(10a + 21a^2 + 35 + 6a^3) : (2a + 7)$.
560. $(10x - 6 + 23x^3 - 13{,}8x^2) : (-3 + 5x)$.
561. $(15ab + 24a^2b - 12b^2 - 30a^3) : (4b - 5a)$.
562. $(12x^2y + 8y^2 - 4xy - 6x^3) : (x - 2y)$.
563. $(1 + 2a - a^2 + 6a^3) : (3a + 1)$.
564. $(6 + x^3 - 7x) : (x^2 - 3x + 2)$.
565. $(4x^3 - 12y^3 - 12x^2y + 17xy^2) : (4y^2 - 3xy + 2x^2)$.
566. $(14x^3 - 13ax^2 + a^2x + a^3) : (2x - a)$.
567. $(150a^3 - 5a^2b - 4b^3 - 27ab^2) : (15a + 4b)$.
568. $(1 + 52n^3 - 53n^2 + 6n) : (13n^2 - 10n - 1)$.
569. $(12a^3x - 3x^4 + 11ax^3 - 24a^2x^2) : (2ax - 3x^2)$.
570. $(-12a^2bc + 8a^2c^2 - 4acd - 9ab^2d + 6abcd - 3bd^2) : (4ac + 3bd)$.
571. $(4a^4 + 8a + 2a^2 - 2a^3) : (4 + 2a^2 - 3a)$.
572. $(10a + 12a^4 - 9a^3 - 3 - 8a^2) : (4a - 3)$.
573. $(m^4 - 3m^3 - 3m - 3m^2 - 4) : (m^2 - 3m - 4)$.
574. $(z^5 - z^4 + z^3 - z^2 - z + 1) : (z - 1)$.
575. $(a^3x - 2a^4 - 3a^2x^2 + 4a^2x - 2ax^2 + 6x^3) : (2x - a^2)$.
576. $(3x^3y + 3x^2y^2 - 5xy^3 + 2y^4) : (3x^2 - 3xy + y^2)$.
577. $(a^4 - 4a^2 + 4a - 1) : (a^2 + 2a - 1)$.
578. $(x^4 - x^2 + 2x - 1) : (x^2 - x + 1)$.
579. $(6m^4 + 21m^3 + 20m^2 + 9m - 20) : (2m^2 + 3m + 4)$.
580. $(21x^4 - 44x^3 - 3x^2 + 4x - 3) : (7x^2 + 1 - 3x)$.
581. $(30 - 26a + 45a^2 - 18a^3 + 14a^4) : (3 - 2a + 2a^2)$.
582. $(8a^4 + 6a^3x - 9a^2x^2 + 18ax^3 - 8x^4) : (4x^2 - 3ax + 4a^2)$.
583. $(2n^5 + 3n^4 - n^3 - 3n^2 - n) : (2n^2 - n - 1)$.
584. $(4m^5 - 8m^4 - 15m^3 + 7m^2 + 7m - 3) : (m^2 - 2m - 3)$.
585. $(3a^5 - 5a^4 + 11a^3 - 5a^2 - a + 3) : (a^2 - a + 3)$.
586. $(a^8 + a^6 + 2a^4 - a^2 + 3) : (3 + 2a^2 + a^4)$.
587. $(a^5 + 2a^3 + a^2 + 7a - 3) : (a^2 + 2a + 3)$.
588. $(3x^5 - 5x^4y + 6x^3y^2 - 6x^2y^3 + 3xy^4 - y^5) : (3x^2 - 2xy + y^2)$.
589. $(a^6 - a^4 + 2a^3 - 3a^2 + 2a - 1) : (a^3 - a^2 + a - 1)$.
590. $(x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1) : (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$.
591. $(\frac{1}{6}a^3 - \frac{2}{3}a^2 - 3\frac{1}{6}a + 1) : (\frac{1}{3}a + 1)$.
592. $(a^4 - 8{,}75a^3 + 0{,}3a^2 + 10{,}5a - 1{,}8) : (2{,}5a^2 - 3)$.
593. $(\frac{1}{9}a^4 - \frac{1}{27}a^3 - \frac{5}{27}a^2 + \frac{1}{18}a + \frac{1}{36}) : (\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{2})$.
594. $(0{,}1x^4 + \frac{1}{60}x^3 - \frac{97}{1260}x^2 + \frac{5}{56}x - \frac{1}{28}) : (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4})$.
595. $(9a^3 + a - 2) : (3a + 2)$.
596. $(5 - 4x + 19x^2 - 6x^3 + 14x^4) : (7x^2 - 3x - 1)$.
597. $(3a^4 - 7a^3b + 11a^2b^2 - 6ab^3 + 6b^4) : (a^2 - ab + 2b^2)$.
598. $1 : (1 - q)$.
599. $x : (1 + q)$.

Въ слѣдующихъ примѣрахъ написать частное, не производя дѣйствія:

600. $(x^4 - y^4) : (x - y)$.
601. $(a^9 - b^9) : (a - b)$.
602. $(x^3 + y^3) : (x + y)$.
603. $(m^4 - n^4) : (m + n)$.
604. $(a^5 + 243x^5) : (a + 3x)$.
605. $(x^6 + 1) : (x^2 + 1)$.
606. $(x^9 + n^3) : (x^3 + n)$.
607. $(x^6y^3 + 1) : (x^2y + 1)$.
608. $(x^{20} + 1) : (x^4 + 1)$.
609. $(x^{5n} + y^{5n}) : (x^n + y^n)$.

ГЛАВА VII.

Разложеніе алгебраическихъ выраженій на множителей.

§ 78. Цѣлыя алгебраическія выраженія раздѣляются на *простыя* и *составныя.*

Простымъ называется такое выраженіе, которое дѣлится безъ остатка только на себя и на единицу; напр.: a, $a + b$, $x - y$.

Составнымъ же называется такое выраженіе, которое дѣлится не только на себя и на единицу, но и на другія количества; напр.: ab, $4a^2x$, $a^2 - b^2$.

Всякое составное алгебраическое выраженіе можно представить въ видѣ произведенія простыхъ алгебраическихъ выраженій, не измѣняя его величины, напр.:

$$a^2 - b^2 = (a + a)\ (a - b).$$

Такое преобразованіе алгебраическихъ выраженій называется *разложеніемъ на множителей.*

§ 79. **Разложеніе одночленовъ.** Одночлены разлагаются на множителей очень легко. Такъ напр.: $12a^3b^2c$ есть произведеніе слѣдующихъ простыхъ множителей $2 . 2 . 3aaabbc$, которые можно соединять въ какія угодно группы.

§ 80. **Разложеніе многочленовъ**. Что же касается разложенія многочленовъ, то здѣсь предоставляются значительныя трудности. Выводъ общаго правила разложенія многочленовъ на множителей принадлежитъ высшей алгебрѣ; въ начальной же алгебрѣ могутъ быть указаны только нѣкоторые частные случаи, которыми съ успѣхомъ можно пользоваться при различныхъ преобразованіяхъ формулъ.

I. Вынесеніе общаго множителя за скобку. Если всѣ члены многочлена содержатъ общаго множителя, то его можно вынести за скобку. Для этого надо весь многочленъ раздѣлить на общаго множителя и потомъ обозначить, что частное должно быть помножено на того же множителя; напр.: $aq - bq + cq = (a - b + c)q$.

Примѣры: 1) $18a^5b^2 - 14a^4b^3 + 8a^3b^4 = 2a^3b^2\ (9a^2 - 7ab + 4b^2)$.
2) $3a^{n+1} - 12a^n + 6a^{n-1} = 3a^{n-1}(a^2 - 4a + 2)$.
3) $2a(x - 1) + 3b(x - 1) = (x - 1)\ (2a + 3b)$.

При вынесенiи за скобку иногда берутъ общаго множителя со знакомъ *минусомъ*, при чемъ знаки у членовъ частнаго измѣняются на обратные.

4) $-ay-ax=-a(y+x)$.
5) $-an+bn-cn=-n(a-b+c)$.
6) $4a^2b-6ab^2-8ab=-2ab(-2a+3b+4)$.

II. Разложенiе многочлена на множителей по частямъ. Когда всѣ члены многочлена не имѣютъ общихъ множителей, тогда полезно разбить данный многочленъ на части: по два или болѣе членовъ въ каждой, и затѣмъ въ каждой части выносятся за скобки ихъ общiе множители. При удачной группировкѣ частей могутъ оказаться общiе множители для всего многочлена, которые и выносятся за скобки, какъ это видно изъ слѣдующихъ **примѣровъ**:

1) $ac+ad+bc+bd=(ac+ad)+(bc+bd)=a(c+d)+b(c+d)=$
$=(c+d)(a+b)$.
2) $x^2y^3-xyz^2t+xy^2zt-z^3t^2=(x^2y^3-xyz^2t)+(xy^2zt-z^3t^2)=$
$=xy(xy^2-z^2t)+zt(xy^2-z^2t)=(xy^2-z^2t)(xy+zt)$.
3) $ac+ad-bc-bd=(ac+ad)-(bc+bd)=a(c+d)-b(c+d)=$
$=(c+d)(a-b)$.
4) $ax^2-bx^2+cx^2-ax+bx-cx=x(ax-bx+cx-a+b-c)=$
$=x[x(a-b+c)-(a-b+c)]=x[(a-b+c)(x-1)]=$
$=x(a-b+c)(x-1)$.

Другой способъ:

$ax^2-bx^2+cx^2-ax+bx-cx=x(ax-a-bx+b+cx-c)=$
$=x[(ax-a)-(bx-b)+(cx-c)]=x[a(x-1)-b(x-1)+c(x-1)]=$
$=x(x-1)(a-b+c)$.

5) $8a^{n+1}-4a^nb-2ab+20a^nz+b^2-5bz=$
$=(8a^{n+1}-2ab)-(4a^nb-b^2)+(20a^nz-5bz)=$
$=2a(4a^n-b)-b(4a^n-b)+5z(4a^n-b)=$
$=(4a^n-b)(2a-b+5z)$.

Другой способъ:

$8a^{n+1}-4a^nb-2ab+20a^nz+b^2-5bz=$
$=(8a^{n+1}-4a^n\cdot b+20a^nz)-(2ab-b^2+5bz)=$
$=4a^n(2a-b+5z)-b(2a-b+5z)=$
$=(2a-b+5z)(4a^n-b)$.

III. Разложенiе на множителей помощью формулъ замѣчательныхъ случаевъ умноженiя и дѣленiя. При разложенiи многочленовъ на множителей весьма выгодно пользоваться замѣчательными случаями умноженiя и дѣленiя.

1) Такъ, если многочленъ состоитъ изъ суммы квадратовъ двухъ количествъ $\pm$ удвоенное произведеніе этихъ количествъ, то его можно представить въ видѣ квадрата суммы или разности этихъ количествъ.

Примѣры: 1) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.
2) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.
3) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.
4) $a^2 - 12ax^2 + 36x^4 = a^2 - 2 \,.\, a \,.\, 6x^2 + (6x^2)^2 = (a - 6x^2)^2$.
5) $a^{2m} + 2a^m b^n + b^{2n} = (a^m)^2 + 2a^m b^n + (b^n)^2 = (a^m + b^n)^2$.
6) $4a^2 - a + \frac{1}{16} = (2a)^2 - 2 \,.\, 2a \,.\, \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 = (2a - \frac{1}{4})^2$.
7) $m^2 + 2 + \frac{1}{m^2} = m^2 + 2 \,.\, m \,.\, \frac{1}{m} + \left(\frac{1}{m}\right)^2 = \left(m + \frac{1}{m}\right)^2$.
8) $(a + b)^2 + 2(a + b)\, x + x^2 = [(a + b) + x]^2 = (a + b + x)^2$.

2) Если двучленъ состоитъ изъ разности квадратовъ двухъ количествъ, то его можно представить въ видѣ произведенія суммы на разность этихъ количествъ.

Примѣры: 1) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
2) $a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$.
3) $36x^2 - 25y^2 = (6x)^2 - (5y)^2 = (6x + 5y)(6x - 5y)$.
4) $m^4 - n^4 = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2) = (m^2 + n^2)(m + n)(m - n)$.
5) $(a + b)^2 - c^2 = [(a + b) + c][(a + b) - c] = (a + b + c)(a + b - c)$.
6) $a^2 - (b + c)^2 = [a + (b + c)][a - (b + c)] = (a + b + c)(a - b - c)$.

3) Нѣкоторые многочлены представляютъ кубъ суммы или разности двухъ количествъ.

Примѣры: 1) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$.
2) $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3 = a^3 + 3a^2 \,.\, 2b + 3a \,.\, (2b)^2 + (2b)^3 = (a + 2b)^3$.

4) Если двучленъ состоитъ изъ разности какихъ угодно степеней двухъ количествъ, то его можно представить въ видѣ произведенія разности этихъ количествъ на частное, полученное отъ дѣленія даннаго двучлена на разность.

Примѣры: 1) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
2) $x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$.
3) $27m^3 - 64n^3 = (3m)^3 - (4n)^3 = (3m - 4n)[(3m)^2 + 3m \,.\, 4n + (4n)^2] = (3m - 4n)(9m^2 + 12mn + 16n^2)$.

5) Если двучленъ состоитъ изъ разности четныхъ степеней или суммы нечетныхъ степеней двухъ количествъ, то его можно представить въ видѣ произведенія суммы этихъ количествѣ на частное, полученное отъ дѣленія даннаго двучлена на сумму.

Примѣры: 1) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
2) $a^4 - b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$.

Выводъ правила. Изъ всего вышесказаннаго мы можемъ вывести слѣдующее правило: *Чтобы разложить какой-нибудь многочленъ на множителей, надо прежде всего вынести общихъ множителей за скобки, затѣмъ посмотрѣть: нельзя ли многочленъ, заключенный въ скобкахъ, разложить по частямъ, а также: не представляетъ ли онъ замѣчательнаго случая умноженія или дѣленія.*

Примѣры:

1) $4a^8b^2 - 4a^2b^8 = 4a^2b^2(a^6 - b^6) = 4a^2b^2(a^3 + b^3)(a^3 - b^3) =$
$= 4a^2b^2(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

2) $a^3bn^8 + m^8b^3a - a^3bm^8 - ab^3n^8 =$
$= ab(a^2n^8 + m^8b^2 - a^2m^8 - b^2n^8) =$
$= ab[(a^2n^8 - a^2m^8) - (b^2n^8 - m^8b^2)] =$
$= ab[a^2(n^8 - m^8) - b^2(n^8 - m^8)] = ab(a^2 - b^2)(n^8 - m^8) =$
$= ab(a + b)(a - b)(n^4 + m^4)(n^4 - m^4) =$
$= ab(a + b)(a - b)(n^4 + m^4)(n^2 + m^2)(n + m)(n - m)$.

3) $6a^{n-1}b^{2-n} - 3a^{n-2}b^{1-n}d^2 + 6a^{n-2}b^{1-n}cd + 3a^{n-2}b^{3-n} - 3a^{n-2}b^{1-n}c^2 +$
$+ 3a^n\, b^{1-n} = 3a^{n-2}b^{1-n}(2ab - d^2 + 2cd + b^2 - c^2 + a^2) =$
$= 3a^{n-2}b^{1-n}[(a^2 + 2ab + b^2) - (c^2 - 2cd + d^2)] =$
$= 3a^{n-2}b^{1-n}[(a + b)^2 - (c - d)^2] =$
$= 3a^{n-2}b^{1-n}[(a + b) + (c - d)]\,[(a + b) - (c - d)] =$
$= 3a^{n-2}b^{1-n}(a + b + c - d)(a + b - c + d)$.

4) $36x^{r+1} - 4x^{r-3}y^4 - 72x^r + 8x^{r-4}y^4 =$
$= 4x^{r-4}(9x^5 - xy^4 - 18x^4 + 2y^4) =$
$= 4x^{r-4}[(9x^5 - 18x^4) - (xy^4 - 2y^4)] =$
$= 4x^{r-4}[(9x^4(x - 2) - y^4(x - 2)] =$
$= 4x^{r-4}(x - 2)(9x^4 - y^4) = 4x^{r-4}(x - 2)(3x^2 + y^2)(3x^2 - y^2)$.

§ 81. Разложеніе трехчлена вида: $x^2 + (m + n)x + mn$.

Указанный въ § 80 II пріемъ разложенія многочлена удобенъ тогда, когда многочленъ состоитъ изъ четнаго числа членовъ. Если же число ихъ нечетное, то нѣкоторые изъ членовъ иногда приходится разбивать на двѣ части и тогда только поступать попред-

ыдущему. Чтобы уяснить себѣ послѣднее правило, возьмемъ трехчленъ: $x^2+11x+24$. Второй членъ этого трехчлена можно замѣнить суммою слѣдующихъ одночленовъ: $8x$ и $3x$. Тогда получимъ:

$$x^2+11x+24=x^2+8x+3x+24=x(x+8)+3(x+8)=(x+8)(x+3).$$

Чтобы разложить на множителей трехчленъ:

$$a^2-2a-35,$$

замѣтимъ, что $-2a=5a-7a$. Тогда

$$a^2-2a-35=a^2-7a+5a-35=a(a-7)+5(a-7)=(a-7)(a+5).$$

§ 82. Выведемъ теперь общее правило, указывающее, какимъ образомъ разлагаются на множителей трехчлены вида:

$$x^2+(m+n)x+mn.$$

Прежде всего замѣтимъ, что трехчлены подобнаго вида получаются отъ перемноженія двухъ биномовъ, у которыхъ первые члены одинаковы. Отъ перемноженія первыхъ (общихъ) членовъ получается первый членъ трехчлена, который равенъ квадрату общаго члена биномовъ. Отъ перемноженія вторыхъ членовъ биномовъ получается послѣдній членъ трехчлена. Наконецъ, отъ перемноженія вторыхъ членовъ на первые (общіе) члены получается два среднихъ члена, которые, какъ подобные, соединяются въ одинъ членъ. Напр.:

1) $(x+3)(x+4)=x^2+4x+3x+12=x^2+7x+12.$
2) $(x-3)(x-4)=x^2-4x-3x+12=x^2-7x+12.$
3) $(x-3)(x+4)=x^2+4x-3x-12=x^2+x-12.$
4) $(x+3)(x-4)=x^2-4x+3x-12=x^2-x-12.$

Изъ этихъ примѣровъ видно, что коэффиціентомъ средняго члена служитъ *сумма вторыхъ членовъ* данныхъ биномовъ. Такъ, въ первомъ примѣрѣ коэф. средняго члена есть: $7=3+4$; во второмъ: $-7=(-3)+(-4)$; въ третьемъ: $1=(4)+(-3)$; въ четвертомъ: $-1=(-4)+(+3)$. Кромѣ того, изъ этихъ примѣровъ легко можно замѣтить, что послѣдній членъ трехчлена будетъ *положительнымъ,* когда вторые члены биномовъ имѣютъ одинаковые знаки, и *отрицательнымъ,* когда вторые члены биномовъ имѣютъ знаки разные (сравн. первые два примѣра съ двумя послѣдними).

§ 83. На основаніи этого замѣчанія мы можемъ вывести **правило:** *Чтобы разложить на множителей трехчленъ вида:* $x^2+(m+n)x+mn$, *нужно разбить средній членъ на два такихъ*

члена, произведеніе коэффиціентовъ которыхъ равнялось бы третьему члену, и затѣмъ поступать по правиламъ, указаннымъ въ § *80, II.*

Примѣры: 1) $a^2+8a+15=a^2+3a+5a+15=a(a+3)+5(a+3)=$ $=(a+3)(a+5)$.

2) $a^2-13a+40=a^2-5a-8a+40=$ $=a(a-5)-8(a-5)=(a-5)(a-8)$.

3) $x^2+5x-14=x^2+7x-2x-14=$ $=x(x+7)-2(x+7)=(x+7)(x-2)$.

4) $x^2-3x-70=x^2-10x+7x-70=$ $=x(x-10)+7(x-10)=(x-10)(x+7)$.

5) $x^2+12bx+35b^2=x^2+5xb+7xb+35b^2=$ $=x(x+5b)+7b(x+5b)=(x+5b)(x+7b)$.

6) $x^6+11x^3+24=x^6+3x^3+8x^3+24=(x^3+3)(x^3+8)=$ $=(x^3+3)(x^3+2^3)=(x^3+3)(x+2)(x^2-2x+4)$.

§ **84.** Есть еще другой способъ, указывающій, какимъ образомъ можно разложить на множителей не только разсмотрѣнный въ предыдущемъ параграфѣ трехчленъ, но и всякій многочленъ, представляющій произведеніе простѣйшихъ биномовъ. Выводъ этого способа основывается на слѣдующемъ свойствѣ многочленовъ (см. § 76): *Всякій многочленъ раздѣлится безъ остатка на разность, полученную отъ вычитанія какого-нибудь количества изъ главной буквы, если этотъ многочленъ обращается въ нуль при замѣнѣ главной буквы этимъ количествомъ.*

Зная это свойство, легко найти тѣ двучлены, на которые данный многочленъ дѣлится безъ остатка. Такъ, многочленъ:

$$x^4-15x^2-10x+24$$

дѣлится на $x-1$, потому что онъ обращается въ нуль, если вмѣсто x поставить въ немъ 1. Раздѣлимъ теперь по извѣстнымъ правиламъ этотъ многочленъ на $x-1$; получимъ въ частномъ:

$$x^3+x^2-14x-24.$$

Это частное дѣлится безъ остатка на $x+2=x-(-2)$, потому что оно обращается въ нуль при замѣнѣ x черезъ: -2. Раздѣливъ $x^3+x^2-14x-24$ на $x+2$, получимъ новое частное:

$$x^2-x-12,$$

которое дѣлится на $x-4$. Раздѣливъ его на $x-4$, получимъ третье частное $x+3$, которое представляетъ простой двучленъ.

Слѣдовательно, многочленъ:

$$x^4-15x^2-10x+24=(x-1)(x+2)(x-4)(x+3).$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что для разложенія на множителей многочлена, представляющаго произведеніе простѣйшихъ биномовъ, надо сначала найти двучленъ, на который

данный многочленъ дѣлится безъ остатка, по правиламъ, указаннымъ въ § 76; затѣмъ весь многочленъ надо раздѣлить на найденнаго двучленнаго дѣлителя и найти снова двучленъ, на который полученное частное дѣлится безъ остатка; съ слѣдующими частными надо поступать попредыдущему до тѣхъ поръ, пока въ частномъ не получится простое выраженіе. Всѣ дѣлители и послѣднее частное и будутъ представлять простыхъ множителей даннаго многочлена.

Самое дѣйствіе располагается слѣдующимъ образомъ:

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
x^4 - 15x^2 - 10x + 24 & x - 1 & & \\
-x^4 \mp x^3 & x^3 + x^2 - 14x - 24 & x+2 & \\
\text{„}\ x^3 - 15x^2 - 10x + 24 & -x^3 \pm 2x^2 & x^2 - x - 12 & x-4 \\
-x^3 \mp x^2 & \text{„}\ -x^2 - 14x - 24 & -x^2 \mp 4x & x+3 \\
\text{„}\ -14x^2 - 10x + 24 & \mp x^2 \mp 2x & \text{„}\ 3x - 12 & \\
\mp 14x^2 \pm 14x & \text{„}\ -12x - 24 & -3x \mp 12 & \\
\text{„}\ -24x + 24 & \mp 12x \mp 24 & 0. & \\
\mp 24x \pm 24 & 0. & & \\
0. & & &
\end{array}
$$

$$x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = (x - 1)(x + 2)(x - 4)(x + 3).$$

Пусть требуется еще разложить на множителей многочленъ:

$$a^4 + 2a^3 - 13a^2 - 14a + 24.$$

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
a^4 + 2a^3 - 13a^2 - 14a + 24 & a - 1 & & \\
-a^4 \mp a^3 & a^3 + 3a^2 - 10a - 24 & a-3 & \\
\text{„}\ 3a^3 - 13a^2 - 14a + 24 & -a^3 \mp 3a^2 & a^2 + 6a + 8 & a + 2 \\
-3a^3 \mp 3a^2 & \text{„}\ 6a^2 - 10a - 24 & -a^2 \pm 2a & a + 4 \\
\text{„}\ -10a^2 - 14a + 24 & 6a^2 \mp 18a & \text{„}\ 4a + 8 & \\
\mp 10a^2 \pm 10a & \text{„}\ 8a - 24 & -4a \pm 8 & \\
\text{„}\ -24a + 24 & -8a \mp 24 & 0. & \\
\mp 24a \pm 24 & 0. & & \\
0. & & &
\end{array}
$$

$$a^4 + 2a^3 - 13a^2 - 14a + 24 = (a - 1)(a - 3)(a + 2)(a + 4).$$

Задачи: 610. $7a + 7b$.
611. $ax + bx$.
612. $3a - 3b$.
613. $ax - bx$.
614. $5b + 5$.
615. $ab - a$.
616. $18ab - a$.
617. $32a^2 - 8a$.
618. $a^2 + ab$.
619. $x^5 - x^6$.
620. $a^4b^3 + a^2b^5$.
621. $16a^3b^2 - 12a^2b^3$.

622. $10x^4y^2 + 35x^2y^4$.
623. $36x^3y - 6x^2y^2$.
624. $a^{n+1} - a^n$.
625. $18x^{r-1} - 16x^r$.
626. $x^{m+n} + x^n$.
627. $x^p - x^n$.
628. $y^{3m} - 2y^m$.
629. $-4a^2 - 3ab$.
630. $-16a^5b + 10a^2b^4$.
631. $am - an + ap$.
632. $16a^3b + 24a^2b^2 - 32ab^3$.
633. $-ab - ac - ad$.
634. $-xy + xz - xt$.
635. $ax^{r+1} + bx^{r+2} - cx^{r+3}$.
636. $10(a - b) + 15$.
637. $6(a + b) - 24$.
638. $a(x + 1) + ab$.
639. $8(a + b) - 2b$.
640. $a(x + y) + b(x + y)$.
641. $3m(a - b) - 4n(a - b)$.
642. $a(x - 1) + 2b(x - 1)$.
643. $(x + y)^2 + a(x + y)$.
644. $a^2(b + c) - ab(b + c)$.
645. $x(a + b) + a + b$.
646. $a(a^2 - 2a - 1) - b(a^2 - 2a - 1)$.
647. $4a(n + m) - 3a^2(n + m) - (n + m)$.
648. $3a(p - q) - 2b(p - q)$.
649. $6a^2(a - n) + 2a(n - a) + n - a$.
650. $ac + ax + bc + bx$.
651. $x^3 - x^2y + 3xy^2 - 3y^3$.
652. $x^3 + 2x^2 - 2x - 4$.
653. $(2a + 3b)(3c - 2d) + (7a - 5b)(3c - 2d)$.
654. $(4x + 3y)(8a - 3b) - (4x + 3y)(4a - 7b)$.
655. $(16a - 9b)(4x - y) - (4x - y)(10a - 9b)$.
656. $(x - y)(a + b) - (c + d)(y - x)$.
657. $16a^4b^3c^2 - 8a^3b^4 + 2a^2b^2c^2 - ab^3$.
658. $ax - ay + bx - by - cx + cy$.
659. $an^2 - bn^2 + bn - an + a - b$.
660. $(a + b)^2 + (a - b)^2 + a^2 + b^2$.
661. $x^2 + 2xy + y^2$.
662. $x^2 - 2xy + y^2$.
663. $a^2 - 2a + 1$.
664. $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$.
665. $9c^2 - 6cn + n^2$.
666. $3xya^2 + 6ab^2xy + 3xb^4y$.
667. $2x + 4x^2 + \frac{1}{4}$.
668. $-x^2 - 2xy - y^2$.
669. $4x - 2x^2 - 2$.
670. $6a^2b^2c^3 - b^4c^6 - 9a^4$.
671. $a^{16} + 10a^8b^5 + 25b^{10}$.
672. $x^{2m} - 2x^my^n + y^{2n}$.
673. $49a^2 - 266ab + 361b^2$.
674. $(a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$.
675. $a^2 - 2a(b - c) + (b - c)^2$.
676. $(a - b)^2 - 2(a - b)c + c^2$.
677. $x^2 - y^2$.
678. $a^2 - 16$.
679. $36 - x^2y^2$.
680. $a^2 - 1$.
681. $25a^2 - b^2$.
682. $\frac{1}{4}x^2y^4 - 0{,}01$.
683. $24c^3x - 6cx^3$.
684. $72a^{r+2} - 8a^r$.
685. $(x + y)^2 - z^2$.
686. $a^2 - (b + c)^2$.
687. $(a + b)^2 - (c - d)^2$.
688. $(a - b)^2 - (a + b)^2$.
689. $x^2 + y^2 + 2xy - z^2$.
690. $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$.
691. $4n^2 - p^2 + 2pq - q^2$.
692. $m^2 + 2mn + n^2 - (m+n)p$.
693. $ab - ac - b^2 + 2bc - c^2$.
694. $x^2z^2 - x^2y^2 - y + z$.
695. $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2$.
696. $a^2 + b^2 - (c^2 + d^2) - 2(ab + cd)$.
697. $a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2$.
698. $a^2c^2 + b^2d^2 - b^2c^2 - a^2d^2 + 4abcd$.
699. $a^2c^2 + b^2d^2 - b^2c^2 - a^2d^2 - 4abcd$.

700. $a^3 - b^3$.
701. $x^3 - y^3$.
702. $a^3 - 1$.
703. $x^3 - 8y^3$.
704. $m^5 - n^5$.
705. $125a^3 - 8b^3$.
706. $27x^3 - y^6$.
707. $32a^5 - n^{10}$.
708. $343x^3 - 125y^3$.
709. $x^5 + y^5$.
710. $a^3 + b^3$.
711. $8x^3 + z^6$.
712. $x^3 + 1$.
713. $243a^5 + 3125b^5$.
714. $c^3 + 27$.
715. $b^2a^7 + b^7a^2$.
716. $xa^4 + x^4a$.
717. $x^5 - xy^4$.
718. $a^4 - 1$.
719. $3a^7 - 3ab^6$.
720. $a^6 - b^6$.
721. $m^{12} - n^{12}$.
722. $x^{12} - y^6$.
723. $x^8 - 1$.
724. $3x^2 - 3x^{20}$.
725. $x^{6n} - 1$.
726. $a^3 - b^3 - 2a^2b + 2ab^2$.
727. $7ac^3 - 7a^4$.
728. $x^{10} - 1$.
729. $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2$.

730. $(a + b)(a^2 - c^2) - (a - c)(a^2 - b^2)$.
731. $(a + b)(2a^2 + 3b^2) - (3a^2 + 2b^2)(a + b)$.
732. $a^2b^2(x^3 + 1) - c^2d^2(x^3 + 1)$.

733. $a^2 + 4a + 3$.
734. $x^2 - 3x + 2$.
735. $x^2 + 15x + 50$.
736. $a^2 - 9a + 20$.
737. $x^2 + 12x + 27$.
738. $x^2 - 12x + 27$.
739. $a^2 - 16a + 15$.
740. $a^2 + 64a + 240$.
741. $z^2 - 6z + 8$.
742. $m^2 - 19m + 90$.
743. $a^2 - 11a + 30$.
744. $7x^2 - 70x + 147$.

745. $a^2 - 2a - 35$.
746. $a^2 + a - 30$.
747. $x^2 - 3x - 4$.
748. $a^2 + 4a - 60$.
749. $a^2 - 10a - 24$.
750. $y^2 - y - 90$.
751. $26 - 15n + n^2$.
752. $12 + 7a + a^2$.
753. $a^2 - 5ab + 4b^2$.
754. $x^2 + 2xy - 120y^2$.
755. $x^4 - 5x^2 + 4$.
756. $a^4 - 13a^2b^2 + 36b^4$.
757. $a^6 - 7a^3b^3 - 8b^6$.
758. $-a^2 + 16a - 60$.
759. $-b^2 - 3b + 10$.
760. $15x - x^2 - 56$.

761. $x^3 + 8x^2 + 19x + 12$.
762. $a^3 + 8a^2 + 17a + 10$.
763. $a^3 - 2a^2 - 11a + 12$.
764. $m^3 - m^2 - 4m + 4$.
765. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$.
766. $a^4 + 2a^3 - 5a^2 - 6a$.
767. $x^3 - 7x^2 + 2x + 40$.
768. $n^4 - 19n^3 + 125n^2 - 317n + 210$.

769. $x^4 + 14x^3 + 71x^2 + 154x + 120$.
770. $a^6 + 3a^4b + 3a^2b^2 + b^3$.
771. $x^6 - 3x^2y^2 + 3xy^4 - y^6$.
772. $8x^3 - 60x^2y - 125y^3 + 150xy^2$.
773. $(a - b)(a^2 - b^2) + (b^2 - a^2)(a + b)$.

774. $(m - n)(3x^2 + 4y^2) + (2x^2 + 5y^2)(n - m)$.
775. $a^4 + a^3 + a + 1$.
776. $x^{n+1} + x^n + x^{n-2} + x^{n-3}$.
777. $(x+y)^3 - x^3 - y^3$.
778. $a^4 - 10a^2b^2 + 9b^4$.

779. $a^6 - 2a^3 + 1$.
780. $a^5b^2c^3 + 6a^3b^5c^3 - 16ab^2c^5 + 9ab^8c^3$.
781. $7a^{12} - 112a^4 - 28a^{10} + 448a^2$.
782. $a^{11} - a^9 + a^8 - a^6 - a^5 + a^3 - a^2 + 1$.
783. $x^8 + y^8 - x^6y^2 - x^2y^6$.

ГЛАВА VIII.

Нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя.

§ 85. *Общимъ дѣлителемъ двухъ или нѣсколькихъ алгебраическихъ выраженій называется такое количество, на которое данныя выраженія дѣлятся безъ остатка.* Такъ, общими дѣлителями для выраженій $12a^3b^2$ и $16a^2b^3$ будутъ:

$$a,\ ab,\ 4a^2b \text{ и др.}$$

Точно такъ же для выраженій: $a^2 - b^2$ и $a^2 + 2ab + b^2$ общимъ дѣлителемъ будетъ: $a + b$.

Если алгебраическія выраженія не имѣютъ общихъ дѣлителей (кромѣ единицы), то такія выраженія называются *первыми между собою,* или *взаимно простыми.* Напр.:

1) ab и cd, 2) $a^2 + b^2$ и $a + b$, 3) $a^2 - b^2$ и $a^2 - 1$.

§ 86. *Общимъ наибольшимъ дѣлителемъ*) двухъ или нѣсколькихъ алгебраическихъ выраженій называется такой общій дѣлитель ихъ, по раздѣленіи на который получаются частныя, первыя между собою.*

Такъ, для выраженій:

$$12a^3b^2 \text{ и } 16a^2b^3$$

общимъ наибольшимъ дѣлителемъ будетъ $4a^2b^2$, потому что частныя: $3a$ и $4b$, полученныя отъ дѣленія этихъ выраженій на $4a^2b^2$, суть выраженія, первыя между собою. Точно такъ же для выраженій:

$$a^2 - b^2 \text{ и } a^2 + 2ab + b^2$$

общій наибольшій дѣлитель будетъ $a + b$.

*) Нельзя смѣшивать буквеннаго общаго наибольшаго дѣлителя съ численнымъ. Напр., для выраженій: ab и ac общій наиб. дѣлитель будетъ a при всякомъ значеніи a, b и c. Между тѣмъ, если $a=5$, $b=6$, $c=8$, то численный общій наиб. дѣлитель для этихъ выраж. $= 10$.

§ 87. Общій наибольшій дѣлитель заключаетъ въ составѣ своемъ всѣхъ общихъ дѣлителей данныхъ выраженій; поэтому, *чтобы найти общаго наибольшаго дѣлителя для двухъ или нѣсколькихъ алгебраическихъ выраженій, надо разложить эти выраженія на простыхъ множителей, потомъ выписать всѣхъ общихъ множителей и перемножить ихъ, — полученное произведеніе и будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ.*

Примѣры: 1) $12ab^2$ и $8a^2b$.

$12ab^2 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3ab^2$; $8a^2b = 2 \,.\, 2 \,.\, 2a^2b$.

Общій наибольшій дѣлитель $= 2 \,.\, 2 \,.\, ab = 4ab$

2) $36x^2y^3z$; $24x^3y^2z^3$; $18x^4y^2z^3$.

$36x^2y^3z = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3x^2y^3z$; $24x^3y^2z^3 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3x^3y^2z^3$;

$18x^4y^2z^3 = 2 \,.\, 3 \,.\, 3x^4y^2z^3$.

Общій наибольшій дѣлитель $= 2 \,.\, 3x^2y^2z = 6x^2y^2z$.

3) $a^2x^2 - a^2$; $2a^2x + 2a^2x^2$.

$$\begin{cases} a^2x^2 - a^2 = a^2(x+1)(x-1); \\ 2a^2x + 2a^2x^2 = 2a^2x(1+x). \end{cases}$$

Общій наибольш. дѣлитель $= a^2(x+1) = a^2x + a^2$.

4) $a^2 + 5a + 4$; $a^2 + 2a - 8$; $a^2 + 7a + 12$.

$$\begin{cases} a^2 + 5a + 4 = (a+1)(a+4); \\ a^2 + 2a - 8 = (a-2)(a+4); \\ a^2 + 7a + 12 = (a+3)(a+4). \end{cases}$$

Общій наибольшій дѣлитель $= a + 4$.

Замѣчаніе: На практикѣ для одночленныхъ выраженій общій наибольшій дѣлитель находится такъ: сначала опредѣляютъ общаго наибольшаго дѣлителя для коэффиціентовъ, затѣмъ приписываютъ къ найденному дѣлителю всѣхъ общихъ буквенныхъ множителей данныхъ выраженій.

Задачи: **784.** ab, bc. **785.** $8acd^2$, $9c^2d$.

786. $4x^3y^5$, $22x^5y^3$. **787.** $12x^2y^3z^5$, $16x^4y^4z^3$, $8x^6y^7z$.

788. $35a^4y^4z^6$, $49a^6y^5z^4$, $14a^3y^3z^7$.

789. $36a^5b^2c^3d$, $24a^2b^3c^4$, $6a^2b^2c$.

790. $144a^nb^m$, $54a^{2n}b^{2m}$, $36a^{3n}b^m$.

791. $32x^{2n}b^{2m-1}$, $48x^{n+1}b^{m+2}$, $64x^5b^m$.

792. $18a^nb^{m+5}$, $27a^{n+2}b^{m+3}$, $36a^{n+4}b^{m+1}$.

793. $14x^{r-3}y^{p+5}z^n$, $21x^{r-1}y^{p+3}z^{n-2}$.

794. $8(x+y)$, $12(x+y)^2$.

795. $27a^3b^2(c-d)^3$, $48a^2b^3(c-d)^2$.

796. $ab + bc$, bn.

797. $16a^3b^2 - 12d^2a^2b$, $8a^4bc^2$.

798. $\begin{cases} 18a^2b^3 - 16a^3b^2. \\ 12a^5b^2 - 14a^2bc. \end{cases}$

799. $\begin{cases} ax + x^2. \\ 2bx - cx. \end{cases}$

800. $\begin{cases} ac^3 - bc^5 - c^7. \\ 3bc^2 + c^4. \end{cases}$

801. $\begin{cases} 21a^3b^2c - 9ab^2c^2. \\ 15a^2b^2c + 3a^5b^4c^2 - 12ab^2c. \end{cases}$

802. $\begin{cases} 12a^3x^4 + 2a^2x^5. \\ 18ab^2x + 3b^2x^2. \end{cases}$

803. $\begin{cases} 6ax + 9bx - 5x^2. \\ 12adc + 18bdc - 10cdx. \end{cases}$

804. $\begin{cases} 7a^2 + 7ab. \\ a^2 - b^2. \end{cases}$

805. $\begin{cases} a^3 - b^3. \\ (a - b)^2. \end{cases}$

806. $\begin{cases} a^2 + 2a + 1. \\ a^2 - 1. \end{cases}$

807. $\begin{cases} ac + bd + ad + bc. \\ af + 2bn + 2an + bf. \end{cases}$

808. $\begin{cases} 6ac + 10bc + 9ad + 15bd. \\ 6c^2 + 9cd - 2c - 3d. \end{cases}$

809. $\begin{cases} a^3 - 2a^2. \\ a^3 - 4a^2 + 4a. \end{cases}$

810. $\begin{cases} a^2 + 2a - 3. \\ a^2 + 5a + 6. \end{cases}$

811. $\begin{cases} 1 - a^2. \\ (1 - a)^2. \end{cases}$

812. $\begin{cases} 2n^3 + 3n^2 + n. \\ n^3 - n^2 - 2n. \end{cases}$

813. $\begin{cases} a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc. \\ a^2 - b^2 - c^2 - 2bc. \end{cases}$

814. $\begin{cases} x^4 - y^4. \\ x^2 - 2xy + y^2. \end{cases}$

815. $\begin{cases} 12a^2 + 5a - 3. \\ 6a^2 + a - 1. \end{cases}$

816. $\begin{cases} a^5 - 2a^4 - 24a^3. \\ a^4 - 4a^3 - 32a^2. \\ a^3 + 11a^2 + 28a. \end{cases}$

817. $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2. \\ x^2 - xy - 6y^2. \\ x^2 - 2xy - 8y^2. \end{cases}$

818. $\begin{cases} a^3 + 3a^2 - 10a. \\ a^4 - 9a^3 + 14a^2. \\ a^4 + 4a^3 - 12a^2. \end{cases}$

819. $\begin{cases} a^5 - 11a^4 + 28a^3. \\ a^4 - 12a^3 + 32a^2. \\ a^3 + 2a^2 - 24a. \end{cases}$

ГЛАВА IX.

Нахожденіе наименьшаго кратнаго.

§ 88. Одно алгебраическое выраженіе называется кратнымъ другого, если оно дѣлится на него безъ остатка. Кратнымъ же двухъ или нѣсколькихъ алгебраическихъ выраженій называется такое количество, которое дѣлится на данныя выраженія безъ остатка. Такъ, для выраженій: $4ab^2$ и $6a^2b$ кратнымъ будетъ:

$$12a^2b^2, \text{ или } 24a^2b^2, \text{ или } 12a^3b^2 \text{ и т. п.}$$

Если мы одно изъ этихъ кратныхъ выраженій станемъ умножать на какія-либо количества, то у насъ получатся новыя кратныя для данныхъ выраженій. На основаніи этого мы можемъ заключить, что два или нѣсколько алгебраическихъ выраженій имѣютъ безчисленное множество общихъ кратныхъ.

§ **89.** *Общимъ наименьшимъ кратнымъ*) двухъ или нѣсколькихъ алгебраическихъ выраженій называется то изъ общихъ кратныхъ для нихъ, которое въ своемъ составѣ содержитъ наименьшее число простыхъ множителей.*

Такъ, для выраженій: $4ab^2$ и $6a^2b$ наименьшимъ кратнымъ будетъ $12a^2b^2$.

Для выраженій $(a+b)^2$ и a^2-b^2 наименьшее кратное $=(a+b)^2(a-b)=a^3+a^2b-ab^2-b^3$.

Правило: Чтобы найти наименьшее кратное двухъ или нѣсколькихъ алгебраическихъ выраженій, надо сперва данныя выраженія разложить на множителей, потомъ взять множителей одного изъ данныхъ выраженій и приписать къ нимъ недостающихъ множителей изъ другихъ выраженій, — затѣмъ перемножить ихъ.

Примѣры: 1) $16a^2bc^3$; $12a^3b^2c$.
$16a^2bc^3 = 2.2.2.2a^2bc^3$; $12a^3b^2c = 2.2.3a^3b^2c$.

Наименьшее кратное $= 2.2.2.2a^2bc^3.3ab = 48a^3b^2c^3$.

2) a^2-b^2 и a^2+b^2-2ab.
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; $(a^2+b^2-2ab)=(a-b)^2$.

Наименьшее кратное $=(a+b)(a-b)^2=a^3-a^2b-ab^2+b^3$.

3) $$\begin{cases} x^2-7x+12=(x-3)(x-4); \\ x^2-4x+\ \ 3=(x-1)(x-3); \\ x^2-5x+\ \ 4=(x-1)(x-4). \end{cases}$$

Наименьшее кратное $=(x-3)(x-4)(x-1)=x^3-8x^2+19x-12$.

Замѣчаніе. На практикѣ для одночленныхъ выраженій наименьшее кратное находятъ такъ: сначала отыскиваютъ наименьшее кратное для коэффиціентовъ, затѣмъ приписываютъ къ нему всѣхъ буквенныхъ множителей данныхъ выраженій съ ихъ наибольшими показателями.

§ **90.** Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи нахожденія наименьшаго кратнаго.

1. *Данныя выраженія не имѣютъ общихъ дѣлителей;* напр.:

1) $3a^2b$ и $4cd^2$.

---

*) Общее наименьшее кратное для буквенныхъ выраженій нельзя смѣшивать съ наименьшимъ кратнымъ для чиселъ, подобно тому, какъ нельзя смѣшивать буквеннаго общ. наибольш. дѣлителя съ численнымъ.

Наименьшее кратное для нихъ $= 3a^2b \cdot 4cd^2 = 12a^2bcd^2$, т.-е. равняется ихъ произведенію.

$$2)\quad \begin{cases} a^2 - b^2 = (a + b)(a - b); \\ c^2 - d^2 = (c + d)(c - d). \end{cases}$$

Наименьшее кратное $= (a + b)(a - b)(c + d)(c - d) = (a^2 - b^2)(c^2 - d^2)$, т.-е. равно произведенію данныхъ выраженій.

Отсюда мы выводимъ правило, что *наименьшее кратное для выраженій, не имѣющихъ общихъ дѣлителей, равно произведенію данныхъ выраженій.*

2. *Одно изъ данныхъ выраженій дѣлится безъ остатка на остальныя;* напр.: $18a^3b^2c$, $6a^2b^2$ и $9ab^2c$. Такъ какъ $18a^3b^2c$ дѣлится на $6a^2b^2$ и $9ab^2c$, то оно и есть наименьшее кратное для данныхъ выраженій.

Задачи: **820.** $16a$, $24b$.
821. a^2bc, ab^2c^2.
822. $48b^4c^{12}$, $36a^2b^5c^7$, $60ab^6$.
823. $16a^3bx$, $12ab^4xy$, $18a^4bxy^4$.
824. $14abxy$, $49a^2b^2x$, $21a^3bx^3$.
825. $20a^2b$, $30ab^2$, $40a^6b^3$.
826. $36a^2b^3x$, $18ab^2x$, $6a^2x$.
827. $180x^4y$, $20x^3y$, $45x^2$.
828. $3ab$, $4cd$, $5m$.
829. $15ax$, $16ny$, $7b$.
830. $16x^2y$, $25xy^2$, $20xy$.
831. $12a^n$, $3a^{n-1}$, $4a^{n-2}$.
832. $14a^{m+1}b$, $28a^{m-1}b^3$, $35ab^m$.
833. $(a + b)d^2x$, $(a + b)xy$.
834. $18a^3b(c - g)$, $12ab^2(c - g)$.
835. $(a + b)(c - d)$, $(a - b)(c - d)$.
836. $\begin{cases} a^2 - b^2. \\ a + b. \end{cases}$
837. $\begin{cases} a^2 - b^2. \\ a^3 - b^3. \end{cases}$
838. $\begin{cases} 2a^4 + 2a^3b. \\ 2a^3b - 2a^4. \\ a^4 - a^2b^2. \end{cases}$
839. $\begin{cases} m^2 + 2mn + n^2. \\ m^2 - n^2. \\ m^2 - 2mn + n^2. \end{cases}$
840. $\begin{cases} ab - bc + ac - a^2. \\ bc + ac - ab - c^2. \end{cases}$
841. $\begin{cases} 2a + 2b + 4. \\ a^2 + 2ab + b^2 + 2a + 2b. \end{cases}$
842. $\begin{cases} x^2 - x + 1. \\ x + 1. \\ x^3 + 1. \end{cases}$
843. $\begin{cases} a^3 - b^3. \\ a - b. \\ a^2 + ab + b^2. \end{cases}$
844. $\begin{cases} 24ax^5 + 4ax^4y. \\ 15ax^4y - 30ax^3y^2. \end{cases}$
845. $\begin{cases} a^3 + 2a^2 + a + 2. \\ a^3 + 2a^2 - 9a - 18. \end{cases}$
846. $\begin{cases} x^2 - 3x - 10. \\ x^3 - 5x^2 - 4x + 20. \end{cases}$
847. $\begin{cases} a^2 + 3a + 2. \\ a^2 + 5a + 6. \end{cases}$

ГЛАВА X.

Алгебраическія дроби.

§ **91. Опредѣленія.** Мы видѣли, что при дѣленіи алгебраическихъ выраженій частное большею частью изображается въ

видѣ дроби, числителемъ которой служитъ дѣлимое, а знаменателемъ — дѣлитель. Такъ, $a : b = \frac{a}{b}$, $(a+b) : (a-b) = \frac{a+b}{a-b}$.

Выраженія: $\frac{a}{b}$ и $\frac{a+b}{a-a}$ называются *дробными* или *алгебраической дробью*. Главное различіе между алгебраической и ариѳметической дробями заключается въ томъ, что въ послѣдней числитель и знаменатель суть цѣлыя положительныя числа, между тѣмъ въ первой они могутъ быть: цѣлыя и дробныя, положительныя и отрицательныя. Таковы, напр. дроби:

$$\frac{2\frac{1}{3}}{0{,}75}, \quad \frac{-0{,}36}{4{,}01}, \quad \frac{4{,}6}{-0{,}0(6)}.$$

Алгебраическія дроби бываютъ *одночленныя и многочленныя*.

Одночленными называются такія дроби, въ которыхъ числитель и знаменатель суть одночлены. Таковы, напримѣръ, дроби:

$$\frac{3a}{4b}, \quad \frac{a^2}{x^2} \text{ и т. п.}$$

Многочленными же называются такія дроби, въ которыхъ числитель или знаменатель, или оба вмѣстѣ, суть многочлены. Таковы, наприм.: $\frac{a-b}{c}$; $\frac{a}{a-b}$; $\frac{a+b}{c-d}$.

§ 92. **Главное свойство алгебраическихъ дробей.** *Величина дроби не измѣняется, если числителя и знаменателя помножимъ, или раздѣлимъ на одно и то же количество.*

Положимъ, что мы имѣемъ дробь $\frac{a}{b}$; докажемъ, что величина ея не измѣнится, если мы a и b помножимъ на какое-нибудь количество m, т.-е. докажемъ, что

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

Пусть частное, полученное отъ дѣленія a на b, равно какому-то количеству q, т.-е. пусть $\frac{a}{b} = q$. Такъ какъ дѣлимое равно дѣлителю, помноженному на частное, то $a = bq$.

Помноживъ обѣ части этого равенства на m, получимъ $am = bqm = bm \,.\, q$. Раздѣливъ обѣ части послѣдняго равенства на bm, получимъ:

$$\frac{am}{bm} = q.$$

Но, по условію, $\frac{a}{b}=q$; слѣдовательно, $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$, такъ какъ двѣ величины, равныя порознь третьей, равны между собою (§ 27, 1).

Такимъ же образомъ можно доказать, что величина дроби не измѣнится, если числителя и знаменателя ея раздѣлить на какое-нибудь количество, т.-е. что $\frac{a:m}{b:m}=\frac{a}{b}$.

§ **93.** На предыдущемъ свойствѣ дробей основывается: 1) перемѣна знаковъ у членовъ дроби, 2) сокращеніе дробей и 3) приведеніе дробей къ общему знаменателю.

§ **94. Перемѣна знаковъ.** Если мы числителя и знаменателя какой-нибудь дроби умножимъ на: — 1, то величина дроби не измѣнится, только измѣнятся знаки у ея членовъ на обратные. Напр.: 1) $\frac{-7}{-8}=\frac{7}{8}$; 2) $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$;

3) $\frac{-a+b}{x-y}=\frac{a-b}{-x+y}=\frac{a-b}{y-x}$; 4) $\frac{-1}{x-a}=\frac{1}{-x+a}=\frac{1}{a-x}$.

Примѣчаніе. При перемѣнѣ знака у одного изъ членовъ дроби измѣнится знакъ и всей дроби; такъ:

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b};\quad \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}.$$

На этомъ основаніи можно измѣнять знаки у одного изъ членовъ дроби и у всей дроби; напр.:

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}=-\frac{-a}{-b};\quad \frac{a-b}{c+d}=-\frac{b-a}{c+d}=-\frac{a-b}{-c-d}.$$

§ **95. Сокращеніе дробей.** Сокращеніе дробей основывается на томъ свойствѣ, что величина дроби не измѣняется, если числителя и знаменателя ея раздѣлить на одно и то же количество.

Правило: *Чтобы сократить алгебраическую дробь, надо числителя и знаменателя ея раздѣлить на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя.* Положимъ, что мы имѣмъ дробь $\frac{6a^3b^2}{8a^2b^3c}$. Раздѣливъ члены ея на $2a^2b^2$, получимъ $\frac{3a}{4bc}$, т.-е. получимъ дробь, члены которой представляютъ выраженія взаимно простыя.

Примѣры: 1) $\frac{16a^5d}{24a^4b}=\frac{2ad}{3b}$ (сокращ. на $8a^4$).

2) $\frac{15x^2y^3}{18x^3y^2}=\frac{5y}{6x}$ (сокращ. на $3x^2y^2$).

3) $\frac{24a^nx^{r-3}}{36a^{n-2}x^r}=\frac{2a^2}{3x^3}$ (сокращ. на $12a^{n-2}x^{r-3}$).

При сокращеніи многочленныхъ дробей сначала числителя и знаменателя разлагаютъ на множителей для обнаруженія ихъ общаго наибольшаго дѣлителя и затѣмъ поступаютъ попредыдущему.

4) $\frac{12ac-15ad}{15ac+12ad}=\frac{3a(4c-5d)}{3a(5c+4d)}=\frac{4c-5d}{5c+4d}$ (сокр. на $3a$).

5) $\frac{6a^2-9ab}{14a^2b-21ab^2}=\frac{3a(2a-3b)}{7ab(2a-3b)}=\frac{3}{7b}$ [сокр. на $a(2a-3b)$].

6) $\frac{x^2+13x+42}{x^2-x-42}=\frac{(x+6)(x+7)}{(x+6)(x-7)}=\frac{x+7}{x-7}$ [сокр. на $(x+6)$].

§ 96. **Приведеніе дробей къ общему знаменателю.** Приведеніе дробей къ общему знаменателю основывается на томъ свойствѣ, что величина дроби не измѣняется, если мы числителя и знаменателя умножимъ на одно и то же количество. Возьмемъ дроби:

$$\frac{3a}{2b^2},\ \frac{5b}{4a^2},\ \frac{2c}{3ab}.$$

Найдемъ наименьшее кратное для знаменателей данныхъ дробей; оно равно $12a^2b^2$. Затѣмъ раздѣлимъ послѣдовательно это наименьшее кратное на знаменателей данныхъ дробей и на полученныя частныя помножимъ соотвѣтственно числителя и знаменателя каждой дроби; получимъ:

$$\frac{3a}{2b^2}=\frac{3a\,.\,6a^2}{2b^2\,.\,6a^2}=\frac{18a^3}{12a^2b^2},$$
$$\frac{5b}{4a^2}=\frac{5b\,.\,3b^2}{4a^2\,.\,3b^2}=\frac{15b^3}{12a^2b^2},$$
$$\frac{2c}{3ab}=\frac{2c\,.\,4ab}{3ab\,.\,4ab}=\frac{8abc}{12a^2b^2},$$

т.-е. получили, что всѣ дроби имѣютъ одинаковыхъ знаменателей.

Изъ этого мы выводимъ **правило:** *Чтобы привести дроби къ общему знаменателю, надо найти наименьшее кратное для знаменателей данныхъ дробей и затѣмъ помножить оба члена каждой дроби на частное, полученное отъ дѣленія наименьшаго кратнаго на знаменателя соотвѣтствующей дроби.*

Замѣтимъ при этомъ, что количества, на которыя умножаются оба члена каждой дроби при приведеніи ихъ къ общему знаменателю, называются **дополнительными множителями.** Таковы, напр., въ предыдущемъ примѣрѣ для первой дроби $6a^2$, для второй $3b^2$, для третьей $4ab$.

Поэтому правило приведенія дробей къ общему знаменателю можетъ быть выражено такъ: *чтобы привести дроби къ общему знаменателю, надо оба члена каждой дроби умножить на соотвѣтствующаго дополнительнаго множителя.*

Примѣры: 1) $\frac{a}{8x^2y}$; $\frac{b}{6xy^2}$; $\frac{c}{4ax}$.

Наименьшее кратное $= 24ax^2y^2$.
Дополн. множит. для 1-й $= 3ay$; для 2-й $= 4ax$; для 3-й $= 6xy^2$.

$$\frac{a}{8x^2y}=\frac{3a^2y}{24ax^2y^2};\ \frac{b}{6xy^2}=\frac{4abx}{24ax^2y^2};\ \frac{c}{4ax}=\frac{6cxy^2}{24ax^2y^2}.$$

Если требуется привести къ общему знаменателю многочленныя дроби, то сперва надо разложить знаменателей на множителей, затѣмъ найти наименьшее кратное и поступать далѣе попредыдущему.

2) $\frac{1}{x^2-4}$; $\frac{2}{x^2-4x+4}$; $\frac{3}{2x+4}$.

Разложимъ знаменателей на множителей:

$x^2-4=(x+2)(x-2)$,	дополн. множ. $= 2(x-2)$;
$x^2-4x+4=(x-2)^2$,	„ „ $= 2(x+2)$;
$2x+4=2(x+2)$,	„ „ $= (x-2)^2$.

Наименьшее кратное $= 2(x+2)(x-2)^2 = 2x^3-4x^2-8x+16$.

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{2(x-2)}{(x^2-4)\,2(x-2)}=\frac{2x-4}{2x^3-4x^2-8x+16},$$

$$\frac{2}{x^2-4x+4}=\frac{4x+8}{2x^3-4x^2-8x+16},$$

$$\frac{3}{2x+4}=\frac{3x^2-12x+12}{2x^3-4x^2-8x+16}.$$

3) $\frac{m}{a+b}$; $\frac{n}{a-b}$; $\frac{q}{a^2-b^2}$.

Наименьшее кратное $= (a+b)(a-b) = a^2-b^2$.
Дополн. множ. для 1-й $= a-b$, для 2-й $= a+b$, для 3-й $= 1$.

$$\frac{m}{a+b}=\frac{ma-mb}{a^2-b^2};\ \frac{n}{a-b}=\frac{na+nb}{a^2-b^2};\ \frac{q}{a^2-b^2}.$$

§ 97. Если знаменатели дробей суть выраженія взаимно простыя, то наименьшее кратное для нихъ равно ихъ произведенію (см. § 90, 1), а дополнительные множители для каждой дроби равны произведенію остальныхъ знаменателей. Слѣдовательно, чтобы привести такія дроби къ общему знаменателю, надо числителя и знаменателя каждой дроби помножить на произведеніе остальныхъ знаменателей.

Примѣры: 1) $\frac{a}{m}, \frac{b}{n}, \frac{c}{p}$. $\qquad \frac{anp}{mnp}, \frac{bmp}{mnp}, \frac{cmn}{mnp}$.

2) $\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a-b}, \frac{c}{c+d}$. $\qquad \frac{a(a-b)(c+d)}{(a+b)(a-b)(c+d)}$, $\frac{b(a+b)(c+d)}{(a+b)(a-b)(c+d)}$, $\frac{c(a+b)(a-b)}{(a+b)(a-b)(c+d)}$.

§ 98. **Чистыя и смѣшанныя дроби.** Дробныя выраженія, въ составъ которыхъ не входитъ слагаемымъ или вычитаемымъ цѣлое количество, называются *чистыми* дробями; таковы, напр.:

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{b+c}, \frac{x-y}{a+b}.$$

Выраженія же, представляющія сумму или разность цѣлаго количества съ дробью, называются *смѣшанными* дробями; таковы, напр.:

$$a+\frac{a-b}{b+c}; \quad x-\frac{1}{a-b}.$$

Всякую смѣшанную дробь можно представить въ видѣ чистой. Для этого надо цѣлое количество помножить на знаменателя дроби и къ произведенію придать или вычесть числителя, затѣмъ подъ полученнымъ результатомъ подписать прежняго знаменателя.

Примѣры: 1) $a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$.

2) $a^2+ab+\frac{ab^2}{a-b}=\frac{(a^2+ab)(a-b)+ab^2}{a-b}=\frac{a^3}{a-b}$.

Иногда, наоборотъ, полезно чистую дробь обратить въ смѣшанную. Для этого надо раздѣлить числителя на знаменателя и къ полученному частному придать дробь, знаменатель которой равенъ знаменателю прежней дроби, а числитель остатку, полученному при дѣленіи; затѣмъ, если возможно, дробь сократить.

Примѣры: 1) $\frac{3a^2b+cd}{ab}=3a+\frac{cd}{ab}$.

2) $$\frac{15a^3-7a^2b-4ab^2}{3a^2-14ab-5b^2}=5a+\frac{63a^2b+21ab^2}{3a^2-14ab-5b^2}=$$
$$=5a+\frac{21ab(3a+b)}{(a-5b)(3a+b)}=5a+\frac{21ab}{a-5b}.$$

Задачи. Сократить дроби:

848. $\frac{a^3b^2}{a^2b^3}$.

849. $\frac{6}{3a^3}$.

850. $\frac{18a^2}{9b^2a}$.

851. $\frac{18a^2b^2x}{24a^3bx^6}$.

852. $\frac{46a^5b}{23a^4b^7}$.

853. $\frac{16a^3bx^4}{48ab^7x^7}$.

854. $\frac{144b^2x^3y}{180abx^2y}$.

855. $\frac{88abx^2z}{121a^2xz^2}$.

856. $\frac{36a^5b}{81a^4b^2}$.

857. $\frac{16a^4b^n}{18a^n b^2}$.

858. $\frac{4a^{n+2}c^{n-3}}{6a^nc^n}$.

859. $\frac{63a^{n-2}c^4}{81a^n c^{n+2}}$.

860. $\frac{8(a+x)}{12b(a+x)}$.

861. $\frac{16(a+b)^2}{36(a+b)(a-b)}$.

862. $\frac{64(a+b)^3}{88(a+b)^2(a-b)}$.

863. $\frac{32(a^2+b^2)^3(x-y)}{48(a^2+b^2)^2(x-y)^2}$.

864. $\frac{a^2b(a-y)^2(a-x)}{ab^2(a-y)(a-x)^2}$.

865. $\frac{a^2(a-b)^n(c-d)^{n-2}}{ab(a-b)^{n-2}(c-d)^n}$.

866. $\frac{16a+8b}{24a+16b}$.

867. $\frac{a^2+ab}{ac+ab}$.

868. $\frac{ax+x^2}{2bx-cx}$.

869. $\frac{ac^3-bc^5-c^7}{3bc^3+c^4}$.

870. $\frac{ab-b^2}{ac-bc}$.

871. $\frac{14a^2-7ab}{10ac-5bc}$.

872. $\frac{12a^3x^4+2a^2x^5}{18ab^2x+3b^2x^2}$.

873. $\frac{9a^3b-6a^2b^2}{12a^2b^2-8ab^3}$.

874. $\frac{3ax-3x^2}{10ab-10bx}$.

875. $\frac{4a^2-3a+1}{4a^3-3a^2+a}$.

876. $\frac{4a^3-4a^2+4a}{9ab-9a^2b-9b}$.

877. $\frac{112a^3x+24abx-80acx}{126a^2bc+27b^2c-90bc^2}$.

878. $\frac{28a^4-16a^2b^2+4a^2x^3}{35a^2b^n-20b^{n+2}+5b^n x^3}$.

879. $\frac{6ac+9bc-5c^2}{12adf+18bdf-10cdf}$.

880. $\frac{ac+ad+bc+bd}{ac+ad-bc-bd}$.

881. $\frac{a^2+ax-a-x}{a^2+ax+a+x}$.

882. $\frac{x^2-xa+xb-ab}{x^3+bx^2+ax+ab}$.

883. $\frac{ab-2a+3b-6}{ab-2a-3b+6}$.

884. $\frac{ac+bd+ad+bc}{af+2bx+2ax+bf}$.

885. $\frac{6ac+10bc+9ad+15bd}{6c^2+9cd-2c-3d}$.

886. $\frac{ax - bx}{a^2 - b^2}$.

887. $\frac{bx + by}{cx^2 + 2cxy + cy^2}$.

888. $\frac{a^4 - 1}{a^2x - a^2y + x - y}$.

889. $\frac{4a^2 - 1}{4a^2 - 4a + 1}$.

890. $\frac{5a^2 + 5ax}{a^2 - x^2}$.

891. $\frac{5a^2 - 20}{7a^2 - 14a}$.

892. $\frac{3x^3y^2 - 3x}{6xy^2 - 6y}$.

893. $\frac{4x^2 - 2xy}{4x^2 - 4xy + y^2}$.

894. $\frac{a^6 - b^6}{4a(a + b)(a^2 - ab + b^2)}$.

895. $\frac{a^4 + a^3 - a - 1}{a^4 - a^3 - a + 1}$.

896. $\frac{12a^2 + 8ab}{9a^2 + 12ab + 4b^2}$.

897. $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$.

898. $\frac{a^3 - x^3}{(a - x)^2}$.

899. $\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - 1}$.

900. $\frac{a^3 + (a + 1)ay + y^2}{a^4 - y^2}$.

901. $\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^6 - y^6}$.

902. $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 5x + 6}$.

903. $\frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 4x - 5}$.

904. $\frac{a^2 + ab - 2b^2}{a^2 - 3ab + 2b^2}$.

905. $\frac{a^2 - 2a - 24}{a^2 + 10a + 24}$.

906. $\frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 2x - 3}$.

907. $\frac{5a^2 + 26a - 24}{3a^2 + 16a - 12}$.

908. $\frac{a^4 - 1}{a^4 - 2a^3 + 2a - 1}$.

909. $\frac{n^3 - 2n^2}{n^2 - 4n + 4}$.

910. $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x + 6}$.

911. $\frac{1 - 4x^3 + 3x^4}{(1 - x)^2}$.

912. $\frac{9x^3 + 54x^2 - 3x - 18}{x^2 + 11x + 30}$.

913. $\frac{2x^3 + x^2 - 8x + 5}{7x^2 - 12x + 5}$.

914. $\frac{2x^3 + 3x^2 + x}{x^3 - x^2 - 2x}$.

915. $\frac{a^3b^3 + c^3x^3}{a^2b^2 - c^2x^2}$.

Привести дроби къ общему знаменателю:

916. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$.

917. $\frac{a}{b^2}, \frac{c}{d^2}$.

918. $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$.

919. $\frac{x}{ab}, \frac{y}{cd}$.

920. $\frac{3x}{ab}, \frac{5a}{b^2}$.

921. $\frac{1}{a^2bc}, \frac{1}{ab^2c}, \frac{1}{abc^2}$.

922. $\frac{a}{b^2c^2}, \frac{b}{a^2c^2}, \frac{c}{a^2b^2}$.

923. $\frac{3ab}{16x^2y^3}, \frac{4a}{15x^3yz^2}, \frac{7b}{20x^2y}$.

924. $\frac{3a^2}{8b^2x^2}, \frac{4b^2}{9a^2x^2}, \frac{7}{18x^2}$.

925. $\frac{4a}{21bxz}, \frac{3b}{14bxz}, \frac{5c}{2x^2z}$.

926. $\frac{1}{4a^2b^2n^3}, \frac{3}{8a^3bn}, \frac{5}{12ab^3n}$.

927. $\frac{x}{4a^2bc}, \frac{y}{6ab^2c}, \frac{z}{8abc^2}$.

928. $\frac{a}{1}, \frac{a}{b}$.

929. $a, \frac{a}{b^2}$.

930. $\frac{b}{a}, c, d$.

931. $\frac{a}{b}, b, \frac{a}{2b^2}$.

932. $\frac{1}{(a-b)^2}, \frac{1}{a-b}.$

933. $\frac{x}{(a+b)^3}, \frac{v}{(a+b)^2(a-b)}.$

934. $\frac{n}{(m-n)^2}, \frac{m}{(m-n)(a-b)}.$

935. $\frac{1}{x^2-y^2}, \frac{1}{x+y}, \frac{1}{x-y}.$

936. $\frac{a}{x+y}, \frac{1}{x-y}, \frac{a}{x}.$

937. $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a-b}, \frac{c}{d}.$

938. $\frac{b}{x-1}, \frac{c}{x^3-1}, \frac{a}{x^2+x+1}.$

939. $\frac{1}{x^3-y^3}, \frac{2}{x-y}, \frac{3}{x^2+xy+y^2}.$

940. $\frac{3}{a^4-b^4}, \frac{4}{a^2+b^2}, \frac{5}{a^2-b^2}.$

941. $\frac{a}{x^2+4x+3}, \frac{b}{x^2-x-2}, \frac{c}{x^2+x-6}.$

942. $\frac{1}{a^2+4a+3}, \frac{2}{a^2-3a-4}, \frac{3}{a^2-a-12}.$

Обратить смѣшанныя дроби въ чистыя:

943. $a+\frac{b}{c}.$

944. $a-\frac{b}{c}.$

945. $x+\frac{1}{x}.$

946. $x-\frac{1}{x}.$

947. $b^2+\frac{1-ab^2}{a}.$

948. $ab-\frac{x+ab^2}{b}.$

949. $a+\frac{b-a}{2}.$

950. $a-\frac{a+b}{4}.$

951. $1-\frac{1}{1-x}.$

952. $1-\frac{1}{x+1}.$

953. $a-\frac{a^2}{a+b}.$

954. $a-\frac{a^2+b^2}{a}.$

955. $\frac{b^2-a^2}{a}+a.$

956. $\frac{x^2-xy}{x+y}-x+1.$

957. $x+y-\frac{x^2-3y^2}{x-y}.$

958. $\frac{4ab+3b^2+a^2}{2ab+b^2+a^2}-2.$

959. $\frac{-a^2+ab+2b^2}{2ab+a^2+b^2}+2.$

960. $a-1+\frac{3a-2}{a-2}.$

961. $2a+3b+\frac{3b^2-2a^2}{a-b}.$

962. $3a^2-1-\frac{3a^3-2a^2-a}{a-1}.$

963. $a^2+ab+b^2+\frac{b^3}{a-b}.$

964. $1+a+a^2+\frac{a^3}{1-a}.$

965. $1+a+a^2+a^3+\frac{a^4}{1-a}.$

966. $1+a+a^2+\ldots+a^n+\frac{a^{n+1}}{1-a}.$

Обратить чистыя дроби въ смѣшанныя:

967. $\frac{a^3+b}{a}.$

968. $\frac{x^2-2xy+y^2}{x}.$

969. $\frac{x^2-x-1}{x^2}.$

970. $\frac{2a^3-3a^2b+b^3}{a^2}.$

971. $\frac{6a^3 + 15a^2b - b^2}{3a^2}$.

972. $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$.

973. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

974. $\frac{a^4 + b^4}{a + b}$.

975. $\frac{x^3 + 7x^2 - 13x - 51}{x^2 - 2x - 3}$.

ГЛАВА XI.

Дѣйствія съ дробями.

§ 99. **Сложеніе и вычитаніе дробей.** При сложеніи и вычитаніи дробей могутъ быть два случая: 1) сложеніе и вычитаніе дробей съ одинаковыми знаменателями и 2) сложеніе и вычитаніе дробей съ разными знаменателями.

I. Положимъ, что требуется сложить двѣ дроби $a/_b$ и $c/_b$. Пусть $a/_b = p$ и $c/_b = q$; тогда $a = bp$ . . . (1), $c = bq$ . . . (2). Сложивъ почленно равенства (1) и (2), получимъ: $a + c = bp + bq = b\ (p + q)$. Если мы обѣ части послѣдняго равенства раздѣлимъ на b, то получимъ

$$\frac{a + c}{b} = p + q.$$

Но $p + q = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$, слѣдовательно

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b},$$

т.-е., *чтобы сложить дроби съ одинаковыми знаменателями, надо сложить числителей данныхъ дробей и подъ полученнымъ результатомъ подписать ихъ общаго знаменателя.*

Вычтя почленно изъ равенства (1) равенство (2), получимъ $a - c = b\ (p - q)$; откуда

$$\frac{a - c}{b} = p - q = \frac{a}{b} - \frac{c}{b},$$

т.-е., *чтобы произвести вычитаніе дробей съ одинаковыми знаменателями, надо изъ числителя первой дроби вычесть числителя второй дроби и подъ полученнымъ результатомъ подписать общаго знаменателя.*

Примѣры:

1) $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{x^2}-\frac{c^2}{x^2}=\frac{a^2+b^2-c^2}{x^2}$.

2) $\frac{a}{b}+\frac{a-c}{b}-\frac{a-2c}{b}=\frac{a+(a-c)-(a-2c)}{b}=$

$=\frac{a+a-c-a+2c}{b}=\frac{a+c}{b}$.

Примѣчаніе. Особенное вниманіе надо обращать при вычитаніи многочленныхъ числителей, чтобы искомый результатъ былъ вѣренъ. Надо помнить правило, что при вычитаніи многочленовъ приписываются всѣ члены вычитаемаго съ обратными знаками (см. 2-й примѣръ).

II. Если данныя дроби имѣютъ различныхъ знаменателей, то при сложеніи или вычитаніи сперва надо привести дроби къ общему знаменателю и затѣмъ поступать попредыдущему.

Примѣры:

1) $\frac{a}{xy}+\frac{b}{xz}-\frac{c}{yz}=\frac{az}{xyz}+\frac{by}{xyz}-\frac{cx}{xyz}=\frac{az+by-cx}{xyz}$.

2) $\frac{2a+3b}{12a}-\frac{3a-2b}{15b}=\frac{5b(2a+3b)-4a(3a-2b)}{60ab}=$

$=\frac{10ab+15b^2-12a^2+8ab}{60ab}=\frac{18ab+15b^2-12a^2}{60ab}=$

$=\frac{6ab+5b^2-4a^2}{20ab}$.

§ **100. Умноженіе дробей.** При умноженіи дробей могутъ быть слѣдующіе случаи.

1. *Умноженіе дроби на дробь.* Положимъ, что намъ надо дробь $\frac{a}{b}$ умножить на $\frac{c}{d}$. Пусть $\frac{a}{b}=q$ и $\frac{c}{d}=p$, тогда $a=bq$ и $c=dp$. Перемноживъ почленно два послѣднія равенства, получимъ $ac=bdqp$. Если мы обѣ части этого равенства раздѣлимъ на bd, то получимъ $\frac{ac}{bd}=qp$. Но $qp=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$, слѣдовательно,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

т.-е., *чтобы умножить дробь на дробь, надо отдѣльно перемножить числителей и знаменателей данныхъ дробей и первое произведеніе поставить числителемъ, а второе знаменателемъ; затѣмъ, если возможно, надо сдѣлать сокращеніе.* Напр.:

$$\frac{36a^2bc}{25rx^2d^3}\cdot\frac{25r^3xd^2}{24a^3b^2c^3}=\frac{36a^2bc\,.\,25r^3xd^2}{25rx^2d^3\,.\,24a^3b^2c^3},\text{ по сокращеніи }=\frac{3r^2}{2abc^2dx}.$$

При умноженіи многочленныхъ дробей полезно прежде числителей и знаменателей данныхъ дробей разложить на множителей. Напр.:

$$\frac{ab^2-b^2}{a^2+ab}\times\frac{a^3-ab^2}{2(ab^2-b^2)}=\frac{b^2(a-1)\,.\,a(a+b)(a-b)}{a(a+b)\,.\,2b^2(a-1)}=\frac{a-b}{2}.$$

2. *Умноженіе дроби на цѣлое количество.* Пусть требуется $\frac{a}{b}$ умножить на m. Такъ какъ всякое цѣлое количество можно представить въ видѣ дроби, числитель которой равенъ единицѣ, то

$$\frac{a}{b}\cdot m=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{1}=\frac{am}{b},$$

т.-е., *чтобы умножить дробь на цѣлое количество, надо числителя умножить на цѣлое количество и подписать подъ полученнымъ результатомъ знаменателя данной дроби.* Напр.:

1) $\frac{3a^2x}{40b^4m^2}\,.\,8bm^3=\frac{3a^2x\,.\,8bm^3}{40b^4m^2}=\frac{3a^2mx}{5b^3}.$

2) $\frac{1}{a^2-b^2}\cdot(a+b)^2=\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}.$

3. *Умноженіе цѣлаго количества на дробь.* Пусть требуется умножить x на $\frac{a}{b}$.

Разсуждая попредыдущему, найдемъ, что

$$x\cdot\frac{a}{b}=\frac{x}{1}\cdot\frac{a}{b}=\frac{xa}{b},$$

т. е., *чтобы умножить цѣлое количество на дробь, надо цѣлое количество умножить на числителя и подъ произведеніемъ подписать знаменателя данной дроби.* Напр.:

$$3a^2b\,.\,\frac{2x}{9a^3b^2}=\frac{3a^2b\,.\,2x}{9a^3b^2}=\frac{2x}{3ab}.$$

4. *Умноженіе смѣшанныхъ дробей.* Чтобы умножить смѣшанныя дроби, надо сначала ихъ обратить въ чистыя и затѣмъ поступать попредыдущему. Напр.:

$$\left(b-\frac{b}{a}\right)\cdot\left(1-\frac{a}{ab-b}\right)=\frac{ab-b}{a}\cdot\frac{ab-b-a}{ab-b}=\frac{ab-b-a}{a}=b-1-\frac{b}{a}.$$

Слѣдствія. 1. Произведеніе нѣсколькихъ дробей равно дроби, числитель которой равняется произведенію числителей данныхъ дробей, а знаменатель — произведенію знаменателей тѣхъ же дробей. Напр.:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{g}{h}=\frac{aceg}{bdfh}.$$

2. *Чтобы возвести въ какую-нибудь степень дробь, надо отдѣльно возвести въ эту степень числителя и отдѣльно знаменателя.* Напр.:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^5}{b^5}.$$

§ **101. Дѣленіе дробей.** При дѣленіи дробей могутъ быть тѣ же случаи, что и при умноженіи.

1. *Дѣленіе дроби на дробь.* Пусть требуется дробь $\frac{a}{b}$ раздѣлить на $\frac{c}{d}$. Положимъ, что $\frac{a}{b}=q$ и $\frac{c}{d}=p$. Тогда $a=bq\ldots$ (1) и $c=dp$ или $dp=c\ldots$ (2). Перемноживъ почленно равенства (1) и (2), получимъ:

$$adp=bqc.$$

Раздѣливъ обѣ части послѣдняго равенства на pbc, получимъ:

$$\frac{ad}{bc}=q:p=\frac{a}{b}:\frac{c}{d},$$

т.-е., *чтобы раздѣлить дробь на дробь, надо числителя первой дроби помножить на знаменателя второй дроби и знаменателя первой дроби на числителя второй дроби, и первое произведеніе поставить числителемъ, а второе знаменателемъ частнаго; затѣмъ, если возможно, надо сдѣлать сокращеніе.*

Примѣры:

1) $$\frac{18a^2b}{55c^2d^2}:\frac{9a^2b^2}{11c^3d}=\frac{18a^2b\,.\,11c^3d}{55c^2d^2\,.\,9a^2b^2}=\frac{2c}{5bd}.$$

2) $$\frac{x^2+3x+9}{x^4-3x^2+9}:\frac{x^3-27}{x^6+27}=\frac{x^2+3x+9}{x^4-3x^2+9}:\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x^2+3)(x^4-3x^2+9)}=$$
$$=\frac{x^2+3x+9)(x^2+3)(x^4-3x^2+9)}{(x^4-3x^2+9)(x-3)(x^2+3x+9)}=\frac{x^2+3}{x-3}.$$

2. *Дѣленіе дроби на цѣлое количество.* Пусть требуется $\frac{a}{b}$ раздѣлить на m. Такъ какъ $m=\frac{m}{1}$, то

$$\frac{a}{b}:m=\frac{a}{b}:\frac{m}{1}=\frac{a}{bm},$$

т.-е., *чтобы раздѣлить дробь на цѣлое количество, надо знаменателя дѣлимаго умножить на дѣлителя.* Напр.:

$$\frac{6x^2y^3}{5a} : 4x^3y^2 = \frac{6x^2y^3}{5a \cdot 4x^3y^2} = \frac{3y}{10ax}.$$

3. *Дѣленіе цѣлаго количества на дробь.* Пусть требуется x раздѣлить на $\frac{a}{b}$.

Разсуждая попредыдущему, найдемъ, что

$$x : \frac{a}{b} = \frac{x}{1} : \frac{a}{b} = \frac{xb}{a},$$

т.-е., *чтобы раздѣлить цѣлое количество на дробь, надо дѣлимое умножить на знаменателя дѣлителя и подъ произведеніемъ подписать числителя дѣлителя.* Напр.:

1) $2x^2y^5 : -\frac{6x^3y^4}{5ab^2} = \frac{-10ab^2x^2y^5}{6x^3y^4} = \frac{-5ab^2y}{3x}.$

2) $a^2x^2 : \frac{a^3x}{a-1} = \frac{a^2x^2(a-1)}{a^3x} = \frac{x(a-1)}{a}.$

4. *Дѣленіе смѣшанныхъ дробей.* Чтобы раздѣлить смѣшанныя дроби, надо обратить ихъ въ чистыя и затѣмъ поступать попредыдущему. Напр.:

1) $\left(a + \frac{a^2}{c}\right) : \left(b + \frac{bc}{a}\right) = \frac{ac + a^2}{c} : \frac{ab + bc}{a} = \frac{a(c+a)}{c} : \frac{b(a+c)}{a} =$
$= \frac{a^2(c+a)}{bc(c+a)} = \frac{a^2}{bc}.$

2) $\left(1 - \frac{2ab}{a^2+b^2}\right) : \left(1 + \frac{2ab}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2} : \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2} =$
$= \frac{(a^2+b^2-2ab)\ (a^2+b^2)}{(a^2+b^2+2ab)\ (a^2+b^2)} = \frac{a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2+2ab} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}.$

§ 102. Рѣшимъ нѣсколько задачъ на дѣйствія съ дробями. Упростить выраженія:

1) $\left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right) : \left(\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3} - \frac{x-y}{x+y}\right).$

Чтобы упростить это выраженіе, опредѣлимъ прежде, чему равняется дѣлимое, — послѣ, чему равняется дѣлитель, и, наконецъ, чему равняется частное.

I. Дѣлимое равно:

$$\frac{x+y}{x-y} + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{(x+y)^2 + (x^2+y^2)}{x^2-y^2} = \frac{2(x^2+xy+y^2)}{x^2-y^2}.$$

II. Дѣлитель равенъ:

$$\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}-\frac{x-y}{x+y}=\frac{(x^3-y^3)-(x-y)(x^2-xy+y^2)}{x^3+y^3}=$$
$$=\frac{x^3-y^3-(x^3-2x^2y+2xy^2-y^3)}{x^3+y^3}=\frac{2x^2y-2xy^2}{x^3+y^3}=\frac{2xy(x-y)}{x^3+y^3}.$$

III. Частное равно:

$$\frac{2(x^2+xy+y^2)}{x^2-y^2}:\frac{2xy(x-y)}{x^3+y^3}=\frac{2(x^2+xy+y^2)(x^3+y^3)}{(x^2-y^2)2xy(x-y)}=$$
$$=\frac{2(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x-y)\,.\,2xy(x-y)}=\frac{(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}{xy(x-y)^2}=$$
$$=\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{xy(x-y)^2}.$$

2) $$\frac{b}{a+b}\cdot\left(\frac{a^2}{b^3}+\frac{1}{a}\right):\left(\frac{a}{b^2}-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a^3+b^3}{ab^3}:\frac{a^2-ab+b^2}{ab^2}=$$
$$=\frac{b\,.\,(a^3+b^3)\,.\,ab^2}{(a+b)\,.\,ab^3\,.\,(a^2-ab+b^2)}=1.$$

3) $$\frac{3mnp}{mp-mn+np}-\frac{\frac{m-1}{m}+\frac{n-1}{n}+\frac{p-1}{p}}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}=$$
$$=\frac{3mnp}{mp-mn+np}-\frac{\frac{(m-1)np+(n-1)mp+(p-1)mn}{mnp}}{\frac{np+mp-mn}{mnp}}.$$

Умноживъ числителя и знаменателя второй дроби на mnp, получимъ, что предыдущее выраженіе будетъ равно:

$$\frac{3mnp}{mp-mn+np}-\frac{(m-1)np+(n-1)mp+(p-1)mn}{mp-mn+np}=$$
$$=\frac{3mnp-(mnp-np+mnp-mp+mnp-mn)}{mp-mn+np}=\frac{np+mp+mn}{mp-mn+np}.$$

Задачи: **976.** $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$, $\frac{a}{b}-\frac{b}{2}$. **977.** $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$, $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}$.

978. $\frac{1}{x}+\frac{5}{x}+\frac{8}{x}$, $\frac{4}{x}-\frac{1}{x}$. **979.** $\frac{3a}{bx}+\frac{5n}{bx}$, $\frac{3a}{bx}-\frac{5n}{bx}$.

980. $\frac{a}{b}+\frac{c}{2b}$, $\frac{a}{b}-\frac{c}{2b}$. **981.** $\frac{7}{ab^2}+\frac{3}{a^2b}$, $\frac{7}{ab^2}-\frac{3}{a^2b}$.

982. $\frac{3a}{xy}+\frac{4b}{xz}+\frac{5c}{yz}$. **983.** $\frac{7}{ab}-\frac{3}{ac}-\frac{4}{bc}$.

984. $\frac{5x}{16a^2bc^3}+\frac{7y}{12ab^2c^2}$.

985. $\frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(a+b)^3}$.

986. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

987. $\frac{m}{x}+\frac{n}{y}+\frac{p}{z}$.

988. $\frac{a}{2x}+\frac{a}{3x}+\frac{a}{4x}$.

989. $\frac{5x}{6ab}-\frac{3x}{4ab}+\frac{x}{3ab}$.

990. $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$, $\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}$.

991. $\frac{a+b}{b}+\frac{a-b}{b}$, $\frac{x+y}{b}-\frac{x-y}{b}$.

992. $\frac{5a^2b+3ab^2}{4xy^2}+\frac{3a^2b-5ab^2}{2xy^2}$.

993. $\frac{7a+2b}{ab}-\frac{4c+3b}{bc}+\frac{2a-3c}{ac}$.

994. $\frac{2x-13y}{xy}+\frac{4z-12x}{xz}-\frac{6y-11z}{yz}$.

995. $\frac{3x-4y}{4}-\frac{4x-25y}{6}+\frac{19y-4x}{12}$.

996. $\frac{6b+n}{6bn}+\frac{3}{4a}-\frac{5a-4n}{4an}-\frac{3b-5a}{5ab}$.

997. $\frac{2ab-3cb}{8ab}+\frac{3}{4}+\frac{2c-5b}{6b}-\frac{12a-5c}{3a}$.

998. $\frac{4a-3b}{2ab}+\frac{1}{a}-\frac{3a-3c}{4ac}+\frac{7}{2c}$.

999. $\frac{1}{6b}+\frac{3a-5b}{3ab}-\frac{1}{a}-\frac{2a-3b}{2ab}$.

1000. $21a+12b-\frac{(7a+6b)^2}{4b}$.

1001. $16a-3c+\frac{(2a-4c)^2}{5c}$.

1002. $\left(\frac{16ab-13ac}{4}-ac\right)+\left(\frac{10ab+3ac}{5}-bc\right)$.

1003. $\left(\frac{7a-3b}{2}-2b\right)-\left(\frac{8a-7b}{3}\right)$.

1004. $\frac{x}{ab+b^2}+\frac{x}{a^2+ab}$.

1005. $\frac{1}{ab-b^2}-\frac{1}{a^2-ab}$.

1006. $\frac{a}{a^2-b^2}+\frac{b}{a+b}$.

1007. $\frac{a}{a-1}-\frac{b}{a^2-1}$.

1008. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}$.

1009. $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$.

1010. $\frac{3+a}{2-a}+\frac{3a-2}{2+a}+\frac{a^2-16a}{4-a^2}$.

1011. $\frac{a^2}{a^2+z^2}+\frac{z^2}{a^2-z^2}$.

1012. $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$.

1013. $\frac{a}{b+x}-\frac{c}{x}+\frac{3c}{4x}+2b$.

1014. $\frac{f+g}{3f+2g}-\frac{5f-5g}{3f+2g}$.

1015. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}-\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}+\frac{2b^3-b^2+a^2}{a^2-b^2}$.

1016. $\frac{x^2}{3y^2}+\frac{x^2y^2}{3y^4-x^4}+\frac{x^6}{3y^2(3y^4-x^4)}$.

1017. $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}-\frac{1-x+x^2}{x^2+1}-\frac{1+x+x^2}{1-x^2}-1$.

1018. $\frac{3a+2x}{a+x}-\frac{5a-x}{a-x}+\frac{a}{2x}$.

1019. $\frac{az}{a^2-z^2}-\frac{a-z}{a+z}$.

1020. $\frac{ac}{a^2-4y^2}+\frac{bd}{ac+2cy}$.

1021. $\frac{a^3}{(a+b)^3}-\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{b}{a+b}$.

1022. $\frac{2ax+x^2}{(a-x)^2}-\frac{a^2+5ax}{(a+x)^2}-\frac{x}{a-x}$.

1023. $\frac{4a-3b}{2a-11b}-\frac{6a+22b}{6a-33b}-\frac{b}{2a-11b}+1$.

1024. $\frac{1+5x}{1-5x}-\frac{1-5x}{1+5x}$.

1025. $\frac{3g^2-2}{7y^2-5}+\frac{7g^2-1}{4y^2-1}$.

1026. $\frac{5y^2-7}{9y^2-1}-\frac{7y-1}{1-3y}$.

1027. $\frac{1}{1-z^2}-\frac{1}{m(1-z)}$.

1028. $\frac{x^2}{xy+y^2}+\frac{x^2+y^2}{xy}-\frac{y^2}{x^2+xy}$.

1029. $\frac{3}{4(1-x^2)}+\frac{3}{8(1-x)}+\frac{1}{8(1+x)}-\frac{1-x}{4(1+x^2)}$.

1030. $\frac{3}{x-1}-\frac{5}{x-2}+\frac{3}{x-3}$.

1031. $\frac{16}{9(x-7)}-\frac{1}{4(x-2)}-\frac{19}{36(x+2)}$.

1032. $\frac{5}{x-3}+\frac{5}{x+3}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$.

1033. $\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+\frac{2}{x-\frac{2}{3}}-\frac{3}{x-\frac{3}{5}}$.

1034. $\frac{x-2}{x^2-x+1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$.

1035. $\frac{1+2x}{(3-x)(1+x)}+\frac{7}{(2+x)(x-3)}+\frac{x}{(1+x)(2+x)}$.

1036. $\frac{3h}{(h-2x)^2}+\frac{2h+x}{(h+x)(h-2x)}-\frac{5}{h+x}$.

1037. $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(a-c)}$.

1038. $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{1}{2(1-x)^2}-\frac{7}{4(1-x)}-\frac{1}{4(1+x)}$.

1039. $\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}$.

1040. $\frac{a^2(x-b)}{a-b}+\frac{b^2(x-a)}{b-a}$.

1041. $\frac{2(a+1)}{2a-b}-\frac{b+2}{2a-b}+\frac{2(b+1)}{a-2b}$.

1042. $\frac{2a-1}{2a-b}+\frac{b^2-2a}{b^2-2ab}-\frac{2b^2-a}{2b^2-ab}$.

1043. $\frac{b^2}{(b^2-a^2)(b^2-4a^2)}+\frac{4}{3(4a^2-b^2)}$.

1044. $\frac{1}{(a+2)(a-3)}-\frac{1}{(1+a)(3-a)}$.

1045. $\frac{m}{(m-n)(m-p)}+\frac{n}{(n-m)(n-p)}$.

1046. $\frac{1}{a^2-6a+5}-\frac{1}{3-2a-a^2}$.

1047. $\frac{x}{x^2-x-12}-\frac{4}{xy+4x+3y+12}$.

1048. $\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}-\frac{1}{(x-1)(x-1)}$.

1049. $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$.

1050. $\frac{1}{ab-bc+ac-a^2}+\frac{1}{bc+ac-ab-c^2}$.

1051. $\frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}+\frac{b^2}{b^2-ab-cb+ac}+\frac{c^2}{c^2-ac-bc+ab}$.

1052. $\frac{x^2-yz}{x^2+xy+xz+yz}+\frac{y^2-xz}{y^2+yx+yz+xz}+\frac{z^2-xy}{z^2+xy+xz+yz}$.

1053. $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

1054. $\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

Умноженіе дробей:

1055. $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}$; $\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{t}$.

1056. $\frac{4a^2}{7b^3}\cdot\frac{14b^4}{15a^8}$.

1057. $\frac{6x^2}{25a^4}\cdot 5a^3$.

1058. $7a^2\cdot\frac{3x}{28a^6}$; $-4a^3\cdot-\frac{19x^2}{84a^5}$.

1059. $\frac{2a^2b}{3x^3y^2}\cdot\frac{3x^3b^2}{2a^2y^2}$.

1060. $\frac{16a^3b^2x^4}{65bm^2n^4y}\cdot-\frac{13nm^5y}{24a^2b^4x^4}$.

1061. $\frac{5am}{6bn} \cdot \frac{3b^{n-3}}{10a^{n+3}}$.

1062. $\frac{42a^{n-2}b^nc}{55x^2y^n} \cdot \frac{11x^ny^nz^n}{14a^nb^nc^n}$.

1063. $\left(\frac{2a^2}{3b^3}\right)^3$; $\left(\frac{x^2}{2by}\right)^3$.

1064. $\left(\frac{4a^2}{5b^4}\right)^2 \cdot \left(\frac{10b^3}{8a}\right)^3$.

1065. $\frac{(a+b)^2}{b} \cdot \frac{b^2}{(a+b)^3}$.

1066. $(a-b)^3 \cdot \frac{c}{(a-b)^4}$.

1067. $-\frac{x}{(a-b)^3} \cdot -\frac{(a-b)^4}{x^8}$.

1068. $\frac{4a^2(a-b)^3}{9b(x-y)^n} \cdot \frac{3b^2(x-y)^{n-2}}{4a(a-b)^2}$.

1069. $\frac{5a^3}{6b^2} \cdot \frac{6b^2}{7c^3} \cdot \frac{7c^4}{8b^2} \cdot \frac{8b^2}{9a^3}$.

1070. $\frac{8a^2m^n}{9bx^2} \cdot -\frac{12x^3b^2}{25m^{n-2}a^3} \cdot \frac{-15a^2m}{16b^4x^6}$.

1071. $\left(\frac{a^3}{9x} + \frac{4b^5x^2}{15a} - \frac{8ab}{27x^3}\right) \cdot \frac{27x^3}{4a^2b^5}$.

1072. $\left(\frac{5a^5}{3b^3} - \frac{3b^5}{5a^6} + \frac{5a^3}{12b^4}\right) \cdot \frac{12b^4}{25a^4}$.

1073. $\frac{a+b}{c^2} \cdot \frac{ac^3}{a^2+2ab+b^2}$.

1074. $\frac{a+1}{b+1} \cdot \frac{b^2-1}{a^2-1}$.

1075. $\frac{a^2+b^2}{2a+2b} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^3+ab^2}$.

1076. $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$.

1077. $\frac{a^4-b^4}{a^2+2ab+b^2} : \frac{a+b}{ab-b^2}$.

1078. $\frac{2}{a^3+a^2b+ab^2} \cdot (a^3-b^3)$.

1079. $\left(\frac{3a}{4b} - \frac{3b}{10a}\right) \cdot \left(\frac{10a}{9b} + \frac{4b}{9a}\right)$.

1080. $\left(\frac{a^2}{b^3} + \frac{a}{b} + 1\right) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} + 1\right)$.

1081. $(a^2-a-1) \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} + 1\right)$.

1082. $\frac{1-x^2}{1+a} \cdot \frac{1-a^2}{x(1+x)} \cdot \left(1 + \frac{x}{1-x}\right)$.

1083. $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} - \frac{4a^2}{a^2-b^2}\right) \cdot \frac{a+b}{4b^2}$.

1084. $\left(1+x-\frac{x^2+3}{x-1}\right) \cdot (1-x^2)$.

Дѣленіе дробей:

1085. $\frac{m}{n} : \frac{p}{q}$; $\frac{x}{y} : \frac{z}{t}$.

1086. $\frac{36a^6b}{35mn^2} : \frac{24ab^6}{175m^2n}$.

1087. $\frac{6x^3y^2}{7ab} : 3x^2y$.

1088. $-16a^2 : \frac{24a^5}{7x^2}$.

1089. $-\frac{64a^3x^2y^3}{65b^2m^2n^2} : -\frac{32a^4x^3y^2}{39b^3m^2n^3}$.

1090. $\frac{5a^m}{6b^n} : \frac{20a^{m-2}}{21b^{n+2}}$.

1091. $-15a^6x^{n-1} : \frac{3cx^n}{2a^3}$.

1092. $\frac{(a+b)^3}{b^3} : \frac{(a+b)^2}{b^2}$.

1093. $-(x-1)^3 : \frac{(x-1)^2}{c}$.

1094. $\frac{x^4}{(a-b)^3} : \frac{ax}{(a-b)^2}$.

1095. $\frac{6a^2(a+b)^3}{7b^3(x+y)^n} : \frac{8a^3(a+b)}{21b(x+y)^{n+2}}$.

1096. $\frac{16(y+z)^{n+r}}{25(x+y)^{m+2}} : \frac{12(y+z)^{n-r}}{35(x+y)^{m-2}}$.

1097. $\left(\frac{3a^2b}{4yx^2} - \frac{5ab^2}{6x^2y} + \frac{5b^3}{12x^3}\right) : \frac{15a^2b^3}{16x^2y^3}$.

1098. $\left(\frac{7a^2b^3}{8z^2t} - \frac{8ab^3}{9zt^2}\right) : 42a^2b^2$.

1099. $\frac{a+b}{b^2} : \frac{a^2+2ab+b^2}{b^3}$.

1100. $\frac{a^2b^2}{a^3-1} : \frac{a^3b^3}{a-1}$.

1101. $\frac{a^2-b^2}{a} : (a-b)$.

1102. $\frac{a}{a-b} : (a+b)$.

1103. $\left(a + \frac{b-a}{1+ab}\right) : \left(1 - \frac{a(b-1)}{1+ab}\right)$.

1104. $\frac{a^2+2a-3}{a^2+4a+4} : \frac{a^2-9}{a^2+3a+2}$.

1105. $\frac{a^2-5a+6}{a^2+a-2} : \frac{a^2-2a-3}{a^2-6a+5}$.

1106. $\left(a^4 - \frac{1}{a^4}\right) : \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)$.

1107. $\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\right) : \left(a + \frac{1}{a}\right)$.

1108. $\left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right) : \left(a - 1 + \frac{1}{a}\right)$.

1109. $(x^2 - y^2 - z^2 + 2yz) : \frac{x+y-z}{x+y+z}$.

1110. $\left(1 - 2a + 8a^2 - \frac{2a+3}{a+1}\right) : \left(4a - 3 + \frac{1}{1+a}\right)$.

1111. $\left(1 - \frac{2ab}{a^2+b^2}\right) : \left(1 - \frac{2b^2}{a^2+b^2}\right)$.

1112. $\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}\right) : \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}\right)$.

1113. $\left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}\right) : \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right)$.

1114. $\left(\frac{x+y}{a+b} + \frac{x-y}{a-b}\right) : \left(\frac{x+y}{a-b} + \frac{x-y}{a+b}\right)$.

1115. $\left(\frac{2a+x}{a+x} + \frac{2x-a}{a-x} - \frac{a^2}{a^2+x^2}\right) : \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.

1116. $\left(\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x}\right) : \left(\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2} + \frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}\right)$.

1117. $\left(\frac{a+x}{a-x} + \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right) : \left(\frac{a-x}{a+x} + \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right)$.

1118. $\left(\frac{a+x}{a-x}+\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right):\left(\frac{a^3-x^3}{a^3+x^3}-\frac{a-x}{a+x}\right).$

1119. $\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}-\left[\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right)\right].$

1120. $\left[\left(\frac{a+1}{a-1}+\frac{a-1}{a+1}\right):\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}\right)\right]^2.$

1121. $\left(\frac{a^2}{b^3}+\frac{1}{a}\right):\left(\frac{a}{b^2}-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right).$

1122. $\frac{a}{x+\frac{b}{y}}-\frac{a}{x-\frac{b}{y}}.$

1123. $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-2}}.$

1124. $\frac{1}{x-\frac{x}{1+\frac{a}{b}}}.$

1125. $\frac{a+\frac{b-a}{1+ab}}{1-\frac{ab-b^2}{1+ab}}.$

1126. $\frac{1-a^2}{(1+ab)^2-(a+b)^2}.$

1127. $\frac{3abc}{ac+bc+ab}-\frac{\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}+\frac{c+1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$

1128. $-\frac{a^2-1}{b(b+1)}\cdot\frac{1+b-b^3-b^4}{1-a^2}\cdot\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{b}}\right).$

1129. $\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}-\frac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}{\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}}.$

1130. $\frac{10-3ab+10a-3b}{25b(a-2)}:\left(\frac{2}{5b}-\frac{3}{25}\right).$

1131. $\frac{8ab^2c}{a+c^3}:\left\{\frac{3a(a-c^3)}{7(x+y)}:\left[\frac{4(x-y)}{21ab^2}:\frac{x^2-y^2}{4(a^2-c^6)}\right]\right\}.$

1132. $\left(\frac{49ad-15bc}{35bd}-\frac{2a-35b}{5b}+\frac{3c-56d}{7d}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{a^2+ab}{a-b}.$

1133. $\frac{\frac{20a^3+8a^2b}{5c^3-15a^2cd^2}}{\frac{25a^2d-4b^2d}{21ac^3}:\left(\frac{21c^4-189a^4d^4}{8a^3}:\frac{36c^4+108a^2c^2d^2}{5a^2-2ab}\right)}.$

1134. $\left[\frac{x(x+1)\ (x+2)}{3}-\frac{x(2x^2+3x+1)}{6}\right]:\frac{x^5+1}{x^4-(x^2+1)(x-1)}.$

1135. $\left[\frac{x(x+y)}{x^2+y^2}:\frac{xy(x+y)^2}{x^4-y^4}\right]\left[\frac{x^4-3x^3+3x^2-x}{(x^3-y^3)y}:\frac{x^4-2x^3+x^2}{xy^3+y^4}\right].$

1136. $\left[\left(\frac{4(a^n-1)}{a^{2n}-2}+\frac{a^{2n}-2}{a^n+1}\right):\frac{3a^{2n-2}-12a^{n-4}}{a^{3n}+5a^{2n}-2a^n-10}\right]:\frac{a^{4n+1}-5a^{3n+1}}{a^{n+2}-4}$.

1137. $\left(\frac{1}{m+\frac{1}{n+\frac{1}{p}}}\right):\left(\frac{1}{m+\frac{1}{n}}-\frac{1}{n(mnp+m+p)}\right)$.

1138. Чему равно $\frac{a-x}{x-b}$, если $x=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{a+b}$?

1139. Чему равно $\frac{a}{b}\left(1-\frac{a}{x}\right)+\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{x}\right)$, если $x=a+b$?

1140. Чему равно $\frac{x+2a}{2b-x}+\frac{x-2a}{2b+x}$, если $x=\frac{4ab}{a+b}$?

1141. Чему равно $\frac{a(2x-a)}{a+2b}+\frac{b(2x-b)}{b+2a}$, если $x=a+b$?

1142. Чему равно $\frac{a(x-a)}{b+c}+\frac{b(x-b)}{a+c}+\frac{c(x-c)}{a+b}$, если $x=a+b+c$?

1143. Чему равно $\frac{a(a-x)}{b}+\frac{b(b+x)}{a}$, если $x=a-b$?

1144. Доказать, что разность между квадратами двухъ цѣлыхъ послѣдовательныхъ чиселъ равна удвоенному меньшему числу плюсъ единица.

1145. Найти, чему равна разность между квадратами двухъ послѣдовательныхъ нечетныхъ чиселъ?

1146. Найти, чему равна разность квадратовъ двухъ послѣдовательныхъ четныхъ чиселъ?

1147. Доказать, что каждое изъ слѣдующихъ выраженій представляетъ цѣлое число, если a цѣлое:

1) $\frac{a(a-3)}{2}$, 2) $\frac{(a+1)(a-2)}{2}$, 3) $\frac{a(a+1)(a+2)}{6}$.

1148. Доказать, что выраженіе

$$\left(\frac{1}{a^n+1}+\frac{1}{a^n-1}\right)-\left(\frac{a^{2n}}{a^n+1}+\frac{1}{a^n-1}\right)$$

обращается въ цѣлое количество, если a цѣлое.

1149. Сократить дробь, у которой числитель кубъ суммы двухъ количествъ, а знаменатель сумма кубовъ тѣхъ же количествъ.

1150. Сократить дробь, у которой числитель сумма квадратовъ суммы и разности двухъ количествъ, а знаменатель сумма квадратовъ этихъ количествъ.

1151. Доказать, что сумма всякихъ трехъ послѣдовательныхъ чиселъ дѣлится безъ остатка на 3.

ГЛАВА XII.

Выраженія съ отрицательными показателями.

§ **103. Значеніе отрицательныхъ показателей.** Мы видѣли, что при дѣленіи степеней одного и того же количества изъ показателя дѣлимаго вычитывается показатель дѣлителя. Если показатель дѣлителя больше показателя дѣлимаго, то въ результатѣ получается выраженіе съ отрицательнымъ показателемъ. Напр.:

$$a^3 : a^7 = a^{3-7} = a^{-4} \text{ или } a^n : a^{n+m} = a^{n-(n+m)} = a^{-m}.$$

Сами по себѣ выраженія: a^{-4} или a^{-m} не имѣютъ никакого смысла, потому что нельзя какое-либо количество взять множителемъ минусъ четыре раза или $-m$ разъ. Что же, является вопросъ, означаютъ такія выраженія?

Если мы частное отъ дѣленія a^3 на a^7 изобразимъ въ видѣ дроби, то получимъ:

$$a^3 : a^7 = \frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^4}.$$

Слѣдовательно, $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$, т.-е, *выраженіе съ отрицательнымъ показателемъ означаетъ дробь, числитель которой есть единица, а знаменатель то же количество, взятое съ положительнымъ показателемъ.* Напр.: $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; $(a+b)^{-3} = \frac{1}{(a+b)^3}$; $4^{-1} = \frac{1}{4}$.

§ **104. Изображеніе дробей безъ знаменателя.** При помощи отрицательныхъ показателей можно всякую дробь изобразить безъ знаменателя, въ видѣ цѣлаго выраженія; *для этого къ числителю надо приписать множителей знаменателя, замѣнивъ ихъ положительные показатели соотвѣтствующими отрицательными.* Напр.:

1) $\frac{a^2}{b^2c^3} = a^2 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^3} = a^2b^{-2}c^{-3}$.

2) $\frac{3ab}{4xz^3} = 3ab \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z^3} = 3ab \cdot 4^{-1}x^{-1}z^{-3} = 3 \cdot 4^{-1}abx^{-1}z^{-3}$.

§ **105. Дѣйствія надъ выраженіями съ отрицательными показателями** совершаются по тѣмъ же правиламъ, какія указаны для выраженій съ положительными показателями. Такъ какъ при сложеніи и вычитаніи показатели не измѣняются, то мы не будемъ останавливаться на этихъ дѣйствіяхъ, а перейдемъ прямо къ умноженію и дѣленію.

Умноженіе. 1) Положимъ, что требуется

$$a^{-3} \cdot a^{-7}.$$

Такъ какъ $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$ и $a^{-7}=\frac{1}{a^7}$, то

$$a^{-3} \cdot a^{-7} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^7} = \frac{1}{a^{10}} = a^{-10} = a^{(-3)+(-7)},$$

т.-е., *если оба показателя отрицательные, то умноженіе количествъ совершается такъ же, какъ и съ положительными показателями,* а именно: *показатели одинаковыхъ буквъ складываются.*

2) Пусть требуется $a^{-3} \cdot a^7$.

Такъ какъ $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$, то $a^{-3} \cdot a^7=\frac{1}{a^3} \cdot a^7=\frac{a^7}{a^3}=a^4=a^{(-3)+7}$, т.-е., и въ этомъ случаѣ *показатели степеней складываются.*

3) Пусть требуется $a^3 \cdot a^{-7}$.

Такъ какъ $a^{-7}=\frac{1}{a^7}$, то $a^3 \cdot a^{-7} = a^3 \cdot \frac{1}{a^7}=\frac{a^3}{a^7}=\frac{1}{a^4}=a^{-4}=a^{3+(-7)}$.

Изъ всего этого видимъ, что умноженіе выраженій съ отрицательными показателями совершается по тѣмъ же правиламъ, какія указаны для выраженій съ положительными показателями, т.-е., показатели степеней одинаковыхъ буквъ складываются.

Примѣры: 1) $5a^5c^{-3} \cdot 6a^{-3}c^{-5}=30a^{5+(-3)}c^{(-3)+(-5)}=30a^2c^{-8}$.
2) $7a^m \cdot 3a^{-n}=21a^{m+(-n)}=21a^{m-n}$.

Дѣленіе. 1) Пусть требуется $a^{-3} : a^{-7}$.

Такъ какъ $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$ и $a^{-7} = \frac{1}{a^7}$, то $a^{-3} : a^{-7} =\frac{1}{a^3} : \frac{1}{a^7}=\frac{a^7}{a^3}= = a^4 = a^{(-3)-(-7)}$.

2) $a^{-3} : a^7 =\frac{1}{a^3} : a^7=\frac{1}{a^{10}} = a^{-10}=a^{(-3)-(+7)}$.

3) $a^3 : a^{-7} = a^3 : \frac{1}{a^7} = a^{10} = a^{3-(-7)}$.

Изъ этихъ примѣровъ мы видимъ, что дѣленіе выраженій съ отрицательными показателями совершается по тѣмъ же правиламъ, какія указаны для дѣленія выраженій съ положительными показателями.

Примѣры: 1) $6a^{-3}b^2 : 2a^{-8}b^{-3} = 3a^5b^5$.
2) $15a^{-m}b^{-x} : 3a^n b^{-y}=5a^{-m-(+n)}b^{-x-(-y)}=5a^{-m-n}b^{-x+y}$.

§ 106. **Слѣдствія.** Изъ всего вышесказаннаго слѣдуетъ: 1) *Дѣйствія надъ дробями можно замѣнить дѣйствіями надъ цѣлыми выраженіями.* Для этого надо дроби изобразить въ видѣ цѣлыхъ выраженій и произвести указанныя дѣйствія по общимъ правиламъ.

Примѣры: 1) $\frac{3a^2b^3}{4x^3y^2}\cdot\frac{2x^5y^3}{3a^4b}=\frac{3}{4}a^2b^3x^{-3}y^{-2}\cdot\frac{2}{3}x^5y^3a^{-4}b^{-1}=$
$=\frac{1}{2}a^{-2}b^2x^2y.$

2) $\frac{5a^2b^3}{6x^3y^2}:\frac{10a^3b^2}{9x^4y^5}=\frac{5}{6}a^2b^3x^{-3}y^{-2}:\frac{10}{9}a^3b^2x^{-4}y^{-5}=$
$=\frac{3}{4}a^{-1}bxy^3.$

2) *Всякое дробное выраженіе, содержащее количества съ отрицательными показателями, можно замѣнить другимъ, не имѣющимъ отрицательныхъ показателей.*

Положимъ, что мы имѣемъ выраженіе: $\frac{3a^{-5}c^{-2}}{4b^{-2}d^2}$. Умноживъ числителя и знаменателя на $a^5c^2b^2$, получимъ:

$$\frac{3a^{-5}c^{-2}}{4b^{-2}d^2}=\frac{3a^{-5}c^{-2}\cdot a^5c^2b^2}{4b^{-2}d^2\cdot a^5c^2b^2}=\frac{3a^0c^0b^2}{4b^0d^2a^5c^2}=\frac{3b^2}{4a^5c^2d^2}.$$

Разсматривая полученное выраженіе $\frac{3b^2}{4a^5c^2d^2}$ и сравнивая его съ даннымъ $\frac{3a^{-5}c^{-2}}{4b^{-2}d^2}$, мы легко можемъ замѣтить, что для уничтоженія въ дроби количествъ съ отрицательными показателями надо перенести эти количества изъ числителя въ знаменателя и обратно, перемѣнивъ при этомъ отрицательные показатели на положительные.

Задачи. Вычислить выраженія:

1152. 2^{-3}, 3^{-2}, 5^{-3}, 10^{-4}. **1153.** $(-2)^{-2}$, $(-3)^{-3}$, $(-\frac{1}{4})^{-3}$.

Изобразить безъ знаменателя слѣдующія выраженія:

1154. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5^2}$, $\frac{1}{a^2b^3}$, $\frac{1}{a^m}$. **1155.** $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{c}{d^2x}$, $\frac{2a^3}{3b^2x^2}$.

1156. $\frac{a}{(a+b)^2}$, $\frac{c}{(c-d)^3}$, $\frac{n}{(a^2-b^2)^4}$.

1157. $\frac{a}{a+b}$, $\frac{xy}{x-y}$, $\frac{x-y}{x+y}$. **1158.** $\frac{1}{\frac{a^2}{b^2}}$, $\frac{1}{\frac{c}{b}}$, $\frac{1}{\frac{a+b}{a-b}}$.

Выполнить указанныя дѣйствія:

1159. $5a^{-5} . 4a^{-4}$.

1160. $x^4 . x^{-8}$.

1161. $7a^{-4} . 8b^{-5}b^2$.

1162. $z^{-3} . z^3$.

1163. $a^{12} : a^{-7}$.

1164. $12a^{-3} : 4a^{-5}$.

1165. $18x^m : 9x^{-n}$.

1166. $a^2 . a^{-3} . a^4 . a^{-n}$.

1167. $-a^3 . -a^{-3} . a^2$.

1168. $4a^2b^{-2} . -3a^{-3}b^3 . 7a^{-1}b^2$.

Освободить отъ отрицательныхъ показателей слѣдующія выраженія:

1169. $4a^2b^{-2}$.

1170. $3c^{-2}d^3$.

1171. $3^{-2} . 2a^{-2}b$.

1172. $\frac{4a^{-3}b}{5c^{-2}x^{-1}}$.

1173. $\frac{2(a+x)^{-1}b}{3(a-x)^{-2}x^{-1}}$.

1174. $\frac{5a^{-2}b^{-n+m}}{6c^{-3}x^{-n-2}}$.

Упростить выраженія:

1175. $\frac{12a^{-5}}{5b^{-4}} . \frac{10a^2}{9a^{-4}}$.

1176. $\frac{3a^{-1}b^{-2}}{4x^2y^{-3}} . \frac{2x^{-2}y^{-5}}{5a^{-3}b^{-2}}$.

1177. $\frac{3a^{-3}x^{-6}y^2}{5b^3c^{-2}d^{-4}} : \frac{6a^2x^{-3}y}{5b^2c^{-3}d^{-2}}$.

1178. $\frac{2a^2(a-1)^{-3}}{3b(x+y)^{-2}} : \frac{7a^{-3}(a-1)^{-2}}{8b^{-2}(x+y)^{-1}}$.

1179. $\frac{ab^{-n}x^2}{z^{-2}b^2t^{-1}} : \frac{5a^{-2}bz^3}{a^{-1}x^3} . \frac{a^{-1}x^{-1}}{3a^2t^{-3}}$.

1180. $\left(\frac{0{,}1a^{-1}d^6y^3}{a^{-4}n^{10}}\right)^2$.

ОТДѢЛЪ III.

Уравненія первой степени.

ГЛАВА I.

Объ уравненіяхъ вообще и ихъ свойствахъ.

§ **107. Опредѣленія.** Мы уже знаемъ, что два алгебраическія выраженія, соединенныя между собою посредствомъ знака $=$, составляютъ равенство; напримѣръ: $a - b = c + d$, или $ab = cd$.

Равенства бываютъ двоякія: *тождества* и *уравненія*.

Тождествомъ называется равенство *очевидное*, т.-е., такое равенство, въ которомъ обѣ части *совершенно одинаковы*, или становятся одинаковыми послѣ выполненія указанныхъ дѣйствій. Таковы, напримѣръ, равенства:

$$a = a;\ (a + b)x = ax + bx;\quad x^2 - 1 = (x + 1)\ (x - 1).$$

Очевидно, что обѣ части тождества всегда будутъ равны, какія бы численныя значенія мы ни придавали буквамъ, входящимъ въ составъ его. Такъ, если мы въ послѣднемъ тождествѣ вмѣсто x поставимъ 5, то получимъ равенство:

$$5^2 - 1 = (5 + 1)\ (5 - 1),\ \text{или}\ 24 = 24.$$

Уравненіемъ же называется такое равенство, въ которомъ первая часть равна второй *не при всякихъ значеніяхъ* буквъ, входящихъ въ составъ его, а только *при нѣкоторыхъ*. Напримѣръ, равенство:

$$3x + 2 = 14$$

есть уравненіе, потому что первая часть его равна второй лишь въ томъ случаѣ, если $x = 4$.

Точно также равенство:

$$y^2 + 6 = 5y$$

есть уравненіе, потому что первая часть его равна второй въ двухъ случаяхъ, а именно: если $y = 2$ и если $y = 3$.

Буквы, которымъ нужно приписывать особыя значенія, чтобы обѣ части уравненія стали равными, называются *неизвѣстными* уравненія; ихъ обыкновенно обозначаютъ послѣдними буквами алфавита: $x, y, z, u, v, w \ldots$

Рѣшить уравненіе значитъ найти такія *количества,* которыя, будучи подставлены вмѣсто неизвѣстныхъ, обращаютъ уравненіе въ очевидное равенство, или тождество. Эти послѣднія количества называются величинами, удовлетворяющими уравненію, или *корнями* уравненія. Такъ, корнемъ для уравненія $3x+2=14$ служитъ число 4; а для уравненія $y^2+6=5y$ корни суть: 2 и 3.

§ **108. Раздѣленія уравненій.** Уравненія дѣлятся по числу неизвѣстныхъ и по степени неизвѣстнаго.

По *числу неизвѣстныхъ* уравненія раздѣляются на уравненія съ однимъ, двумя, тремя и, вообще, со многими неизвѣстными. Напримѣръ:

1) $5x-8=12+3x$. . . уравн. съ однимъ неизвѣстнымъ.
2) $6x+4y=3x+24$. . . уравн. съ двумя неизвѣстными.
3) $7x-13y-5z=16$. . . уравн. съ тремя неизвѣстными.

По *степени неизвѣстнаго* уравненія раздѣляются на уравненія первой степени, — второй степени, или квадратныя, — третьей степени, или кубичныя, — четвертой степени и т. д. Напримѣръ:

1) $4x+6=70$. . . уравн. первой степени.
2) $3x^2+2x-1=0$. . . уравн. 2-й степени, или квадратное.
3) $2x^3+3x^2-4x-5=0$. . . уравн 3-й степени, или кубичное.

Кромѣ того, уравненія раздѣляются на числовыя и буквенныя. *Числовыми* называются такія уравненія, въ которыхъ извѣстные члены выражены числами. Таковы всѣ предыдущія уравненія. *Буквенными,* или общими, называются такія уравненія, въ которыхъ извѣстные члены также обозначены буквами, какъ и неизвѣстные. Таково, напр., уравненіе:

$$ax-m=bx+n.$$

Для обозначенія извѣстныхъ членовъ въ буквенныхъ уравненіяхъ употребляются начальныя буквы алфавита: $a, b, c \ldots$

§ **109. Уравненія тождественныя.** Два или нѣсколько уравненій называются тождественными, или однозначащими, если они имѣютъ одинаковыя неизвѣстныя и эти неизвѣстныя удовлетво-

ряются одними и тѣми же корнями. Такъ, уравненія: $3x + 6 = 4x$ и $4x + 3 = 27$ тождественны, потому что оба имѣютъ одинъ и тотъ же корень: $x = 6$.

Точно также уравненія:

$$y^2 + 6 = 5y \text{ и } 0{,}5y^2 = 2{,}5y - 3$$

тождественны, потому что имѣютъ общіе корни: 2 и 3.

Уравненія же, имѣющія различные корни для неизвѣстныхъ, называются нетождественными. Таковы, напр., уравненія: $2x - 8 = 12$ и $3x - 7 = 11$; въ первомъ изъ этихъ уравненій корнемъ служитъ число 10, а во второмъ 6.

§ **110. Свойства уравненій.** Теорема I. *Если мы къ обѣимъ частямъ уравненія придадимъ или отъ обѣихъ частей отнимемъ по одному и тому же количеству, то получимъ новое уравненіе, которое будетъ тождественно съ первымъ.*

Въ справедливости этой теоремы мы можемъ убѣдиться непосредственно изъ примѣровъ. Такъ, если мы возьмемъ уравненіе $3x - 5 = 10 - 2x$, корень котораго $= 3$, и придадимъ къ обѣимъ частямъ, или отнимемъ отъ обѣихъ частей, положимъ, по 6, то получимъ уравненія:

$$3x - 5 + 6 = 10 - 2x + 6 \text{ и } 3x - 5 - 6 = 10 - 2x - 6,$$

которыя будутъ тождественными съ первымъ, потому что удовлетворяются однимъ и тѣмъ же корнемъ: 3.

Въ общемъ видѣ эта теорема доказывается такъ. Пусть мы имѣемъ уравненіе: $A = B$, гдѣ подъ A разумѣется первая часть уравненія, а подъ B вторая часть его. Прибавимъ къ обѣимъ частямъ, или отнимемъ отъ нихъ по a и докажемъ, что уравненія:

$$A = B \text{ и } A \pm a = B \pm a$$

тождественны. Положимъ, что первое уравненіе имѣетъ одно только неизвѣстное x, и обращается это уравненіе въ тождество, если $x = n$. Очевидно, что и во второмъ уравненіи A будетъ равно B, если мы вмѣсто x поставимъ n; но a всегда равно a,— слѣдовательно, выраженіе $A \pm a$ должно равняться выраженію $B \pm a$ въ томъ случаѣ, если мы въ нихъ x замѣнимъ черезъ n, — что и требовалось доказать.

Такимъ же образомъ можно доказать справедливость этой теоремы и для уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными.

Изъ первой теоремы вытекаютъ **слѣдствія**: 1) *Можно переносить члены уравненія изъ одной части въ другую, при чемъ знаки у переносимыхъ членовъ надо измѣнить на обратные.* Такъ, если въ уравненіи:

$$4x + 8 = 35 - 5x$$

къ обѣимъ частямъ придадимъ по $5x$, то получимъ уравненіе:

$$4x + 8 + 5x = 35.$$

Сравнивая это уравненіе съ первымъ, видимъ, что членъ: $-5x$ перешелъ изъ второй части въ первую, при чемъ его знакъ минусъ перемѣнился на плюсъ.

Вычтя изъ перваго уравненія по 8, получимъ новое уравненіе:

$$4x = 35 - 5x - 8;$$

сравнивая его съ первымъ уравненіемъ, видимъ, что членъ $+8$ перешелъ изъ первой части во вторую съ обратнымъ знакомъ.

2) *Если въ обѣихъ частяхъ уравненія есть одинаковые члены съ одинаковыми знаками, то такіе члены можно вычеркнуть.* Такъ, придавъ къ уравненію $5x - 3x^2 = 10 - 3x^2$ по $3x^2$, получимъ уравненіе $5x = 10$, въ которомъ одинаковые члены: $-3x^2$ уничтожены.

§ **111**. Теорема II. *Если обѣ части уравненія мы умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же количество, то получимъ новое уравненіе, тождественное съ даннымъ.*

Въ справедливости этой теоремы мы также можемъ убѣдиться изъ примѣровъ. Такъ, если мы обѣ части уравненія: $9x - 6 = 6x$, корень котораго $= 2$, умножимъ или раздѣлимъ на 3, то получимъ уравненія:

$$27x - 18 = 18x \text{ и } 3x - 2 = 2x,$$

которыя будутъ тождественны съ первымъ, потому что удовлетворяются однимъ и тѣмъ же корнемъ $= 2$.

Докажемъ эту теорему въ общемъ видѣ, т.-е. докажемъ, что уравненія:

$$A = B,\ Aa = Ba \text{ и } \frac{A}{a} = \frac{B}{a}$$

тождественны. Положимъ, что первое уравненіе обращается въ тождество, если $x = n$. Очевидно, что и во второмъ уравненіи A останется равнымъ B при замѣнѣ въ немъ x черезъ n; но $a = a$, слѣдовательно, выраженіе Aa должно равняться выраженію Ba, если мы въ нихъ вмѣсто x поставимъ n; такимъ образомъ, оба уравненія удовлетворяются однѣми и тѣми же величинами.

Такъ какъ уравненіе $\frac{A}{a}=\frac{B}{a}$ можно представить въ видѣ: $A.\frac{1}{a}=B.\frac{1}{a}$, то, слѣдовательно, объ этомъ уравненіи можно сказать то же, что и объ уравненіи $Aa=Ba$.

Изъ второй теоремы вытекаютъ **слѣдствія:** 1) *Если всѣ члены уравненія имѣютъ общаго дѣлителя, то уравненіе можно сократить.* Для этого надо всѣ члены уравненія раздѣлить на общаго дѣлителя. Такъ, если мы въ уравненіи: $300x-200=600-100x$ всѣ члены раздѣлимъ на 100, то получимъ уравненіе:

$$3x-2=6-x,$$

которое, будучи тождественнымъ съ первымъ, гораздо проще.

2) *Всякое уравненіе можно освободить отъ дробныхъ членовъ.* Для этого надо всѣ члены привести къ общему знаменателю и отбросить знаменателя (что равносильно умноженію обѣихъ частей уравненія на общаго знаменателя). Напр.:

$$1)\ \frac{3x-2}{5}+3=\frac{4x}{15}+5\tfrac{2}{3}.$$

Приведя всѣ члены къ общему знаменателю, получимъ:

$$\frac{3(3x-2)}{15}+\frac{3\,.\,15}{15}=\frac{4x}{15}+\frac{17\,.\,5}{15}.$$

Отбросивъ общаго знаменателя, найдемъ:

$$3(3x-2)+3\,.\,15=4x+17\,.\,5,\ \text{или: } 9x-6+45=4x+85.$$

$$2)\ \frac{4x}{5}-\frac{3x-2}{4}=\frac{x}{2}-4.$$

Приведя дроби къ общему знаменателю и отбросивъ послѣдняго, получимъ:

$$4\,.\,4x-5(3x-2)=10\,.\,x-4\,.\,20,\ \text{или: } 16x-15x+10=10x-80.$$

Примѣчаніе. Изъ приведенныхъ примѣровъ легко видѣть, что для освобожденія отъ дробныхъ членовъ надо числителя каждой дроби помножить на соотвѣтствующаго дополнительнаго множителя; знаменатели же всѣхъ дробей отбрасываются. Если же есть цѣлые члены, то надо считать ихъ дробями, знаменатель которыхъ $=1$.

3) *Можно перемѣнить знаки у всѣхъ членовъ на обратные.* Для этого надо помножить обѣ части уравненія на: -1. Напр.:

$$-5+3x=-2x+15.$$

Умноживъ всѣ члены уравненія на: — 1, получимъ:

$$5-3x=2x-15.$$

§ **112**. Истина, доказанная въ § 111, справедлива только въ томъ случаѣ, если множитель или дѣлитель не содержатъ тѣхъ неизвѣстныхъ, которыя входятъ въ данное уравненіе. Въ противномъ случаѣ, т.-е., если въ составъ множителя или дѣлителя входятъ неизвѣстныя, одинаковыя съ неизвѣстными даннаго уравненія, — въ результатѣ получается уравненіе, вообще говоря, *нетождественное*, съ даннымъ. Пояснимъ это примѣрами:

1) Положимъ, что мы имѣемъ уравненіе:

$$x-2=1.$$

Это уравненіе имѣетъ одинъ только корень $=3$. Если обѣ части уравненія умножимъ на x, то получимъ уравненіе:

$$x^2-2x=x,$$

которое не будетъ тождественнымъ съ даннымъ, потому что оно имѣетъ два корня: $x=3$ и $x=0$.

Точно также, если мы обѣ части уравненія:

$$x-2=1$$

умножимъ на $x-5$, то получимъ уравненіе:

$$x^2-7x+10=x-5,$$

которое нетождественно съ даннымъ, потому что оно имѣетъ два корня: $x=3$ и $x=5$, изъ которыхъ второй не удовлетворяетъ данному уравненію.

Вообще, если мы обѣ части уравненія умножимъ на какое-нибудь выраженіе, содержащее неизвѣстное, то этимъ самымъ *мы вводимъ въ уравненіе посторонніе корни*, а именно тѣ, которые обращаютъ множителя въ нуль.

2) Наоборотъ, если мы раздѣлимъ обѣ части уравненія на выраженіе, содержащее неизвѣстныя, то въ уравненіи теряются тѣ корни, которые обращаютъ дѣлителя въ нуль.

Такъ, уравненіе:

$$x^2-2x-3=2x^2-9x+9$$

имѣетъ два корня: $x=3$ и $x=4$. Если же мы обѣ части уравненія раздѣлимъ на $x-3$, то получимъ уравненіе:

$$x+1=2x-3,$$

которое имѣетъ только одинъ корень $=4$, и которое, слѣдовательно, нетождественно данному.

§ **113**. Эти замѣчанія слѣдуетъ имѣть въ виду при рѣшеніи уравненій, содержащихъ неизвѣстныя въ знаменателѣ. Осво-

бождая отъ дробныхъ членовъ, мы легко можемъ получить уравненіе, нетождественное данному. Такъ, уравненіе:

$$\frac{5}{x-4}=\frac{3}{2x+2}+\frac{x-2}{2x+2}$$

имѣетъ только одинъ корень $=14$.

Если же мы умножимъ обѣ части уравненія на общаго знаменателя $(x-4)(2x+2)$, то получимъ уравненіе:

$$10x+10=3x-12+x^2-6x+8,$$

которое имѣетъ два корня, а именно: $x=14$ и $x=-1$; слѣдовательно, уравненіе, нетождественное данному. Поэтому, при рѣшеніи уравненій, содержащихъ неизвѣстныя въ знаменателѣ, не достаточно еще найти корни, а надо еще *убѣдиться, удовлетворяютъ ли они данному уравненію.* Для этого надо полученные корни подставить вмѣсто неизвѣстныхъ и посмотрѣть, обратится ли уравненіе въ тождество или нѣтъ.

ГЛАВА II.

Рѣшеніе уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

§ **114.** На основаніи предыдущихъ теоремъ (§ **110** и **111**) мы можемъ вывести слѣдующее общее правило для рѣшенія уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ:

1) *Прежде всего надо освободить уравненіе отъ дробныхъ членовъ;*

2) *затѣмъ, раскрыть скобки;* для этого надо выполнить указанныя дѣйствія;

3) *послѣ, надо перенести неизвѣстные члены въ одну часть уравненія, а извѣстные въ другую;*

4) *далѣе, надо сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ;*

5) *наконецъ, надо обѣ части уравненія раздѣлить на коэффиціентъ при неизвѣстномъ,* — и тогда получится количество, которому равно искомое неизвѣстное.

Покажемъ на примѣрѣ, какъ это дѣлается; возьмемъ уравненіе:

$$\frac{25x-35}{12}+\frac{3-3x}{10}=24\tfrac{1}{2}-\frac{3x-3}{4}.$$

Чтобы рѣшить это уравненіе, 1) сначала освободимъ его отъ дробныхъ членовъ: для этого, какъ извѣстно (§ 111, слѣд. 2), надо всѣ члены привести къ общему знаменателю и отбросить знаменателя. Получимъ:

$$(25x - 35) \cdot 5 + (3 - 3x) \cdot 6 = 49 \cdot 30 - (3x - 3) \cdot 15.$$

2) Затѣмъ, въ полученномъ уравненіи раскроемъ скобки; для чего надо выполнить указанныя дѣйствія. Получимъ:

$$125x - 175 + 18 - 18x = 1470 - 45x + 45.$$

3) Далѣе, перенесемъ неизвѣстные члены въ первую часть уравненія, а извѣстные во вторую. Получимъ:

$$125x - 18x + 45x = 1470 + 45 + 175 - 18.$$

4) Теперь сдѣлаемъ приведеніе подобныхъ членовъ. Получимъ:

$$152x = 1672.$$

5) Наконецъ, чтобы найти x, надо 1672 раздѣлить на 152. Получимъ:

$$x = \frac{1672}{152} = 11.$$

Если бы мы пожелали убѣдиться, удовлетворяетъ ли найденный корень данному уравненію, то должны подставить его въ данное уравненіе вмѣсто x и посмотрѣть, обратится ли оно въ тождество. Сдѣлаемъ это:

$$\frac{25 \cdot 11 - 35}{12} + \frac{3 - 3 \cdot 11}{10} = 24\tfrac{1}{2} - \frac{3 \cdot 11 - 3}{4},$$

откуда:

$$20 - 3 = 24\tfrac{1}{2} - 7\tfrac{1}{2}, \text{ или } 17 = 17.$$

§ **115** Не всякое, понятно, уравненіе требуетъ соблюденія всѣхъ указанныхъ выше пріемовъ. Нѣкоторые изъ пріемовъ опускаются, такъ какъ въ нихъ не встрѣчается надобности. Такъ, если въ уравненіи нѣтъ дробныхъ членовъ, то первый пріемъ опускается; если нѣтъ скобокъ, то опускается второй пріемъ и т. д. Покажемъ важнѣйшіе случаи рѣшенія уравненій на примѣрахъ.

I. $5x - 4 = 9x - 40.$

Въ этомъ примѣрѣ опускаются два первые пріема:

3) $5x - 9x = -40 + 4.$

4) $-4x = -36.$

5) $x = \frac{-36}{-4} = 9.$

Замѣтимъ, что послѣ приведенія у насъ получился при x отрицательный коэффиціентъ. Въ данномъ случаѣ для удобства надо перемѣнить знаки у членовъ уравненія:

$-4x=-36$; получимъ $4x=36$, откуда $x=\frac{36}{4}=9$.

$$\text{II.}\quad \frac{13}{12x-18}=\frac{3}{12x-8}.$$

Общій знаменатель равенъ $12(2x-3)(3x-2)$.

1) $13 \cdot 2 \cdot (3x-2)=3 \cdot 3(2x-3)$.
2) $78x-52=18x-27$.
3) $78x-18x=-27+52$.
4) $60x=25$.
5) $x=\frac{25}{60}=\frac{5}{12}$.

Повѣрка:

$$\frac{13}{12 \cdot \frac{5}{12}-18}=\frac{3}{12 \cdot \frac{5}{12}-8};\ \frac{13}{5-18}=\frac{3}{5-8};\ -1=-1.$$

$$\text{III.}\quad \frac{x-1}{x-2}+\frac{6x+2}{3x-2}+\frac{2x}{2-x}=1.$$

Перемѣнивъ знаки въ знаменателѣ дроби $\frac{2x}{2-x}$ и въ самой дроби, получимъ:

$$\frac{x-1}{x-2}+\frac{6x+2}{3x-2}-\frac{2x}{x-2}=1.$$

Общій знаменатель $=(x-2)(3x-2)$.

1) $(x-1)(3x-2)+(6x+2)(x-2)-2x(3x-2)=(x-2) \cdot (3x-2)$.
2) $3x^2-5x+2+6x^2-10x-4-6x^2+4x=3x^2-8x+4$.
3) $3x^2-5x+6x^2-10x-6x^2+4x-3x^2+8x=4-2+4$.
4) $-3x=6$ или $3x=-6$.
5) $x=-6:3=-2$.

Повѣрка: $\frac{-2-1}{-2-2}+\frac{-12+2}{-6-2}+\frac{-4}{2-(-2)}=1$.

$$\frac{-3}{-4}+\frac{-10}{-8}+\frac{-4}{4}=1,\text{ откуда } 1=1.$$

Буквенныя уравненія рѣшаются такимъ же образомъ, какъ и численныя, съ тою лишь разницею, что по перенесеніи членовъ неизвѣстное выносится, какъ общій множитель, за скобки.

$$\text{IV. } \frac{ac^2 + x}{c} = \frac{ax + b^2}{b}.$$

1) $(ac^2 + x)b = (ax + b^2)c.$
2) $abc^2 + bx = acx + b^2c.$
3) $bx - acx = b^2c - abc^2.$
4) $x(b - ac) = b^2c - abc^2.$
5) $x = \frac{b^2c - abc^2}{b - ac} = \frac{bc(b - ac)}{b - ac} = bc.$

Повѣрка: $\frac{ac^2 + bc}{c} = \frac{abc + b^2}{b}$, откуда тождество:

$$ac + b = ac + b.$$

$$\text{V. } \frac{a^2 + x}{n^2 - x} - \frac{a^2 - x}{n^2 + x} = \frac{4anx + 2a^2 - 2n^2}{n^4 - x^2}.$$

Общій знаменатель $= n^4 - x^2$.

1) $(a^2 + x)(n^2 + x) - (a^2 - x)(n^2 - x) = 4anx + 2a^2 - 2n^2.$
2) $a^2n^2 + a^2x + n^2x + x^2 - a^2n^2 + a^2x + n^2x - x^2 = 4anx + 2a^2 - 2n^2.$

Въ этомъ уравненіи сдѣлаемъ приведеніе:

$$2a^2x + 2n^2x = 4anx + 2a^2 - 2n^2.$$

Сокративъ послѣднее уравненіе на 2, получимъ:

$$a^2x + n^2x = 2anx + a^2 - n^2.$$

3) $a^2x + n^2x - 2anx = a^2 - n^2.$
4) $x(a^2 + n^2 - 2an) = a^2 - n^2.$
5) $x = \frac{a^2 - n^2}{a^2 + n^2 - 2an} = \frac{(a+n)(a-n)}{(a-n)^2} = \frac{a+n}{a-n}.$

Задачи: 1181. $x + 3 = 7$. **1182.** $x - 7 = 1$.
1183. $9 - x = 4$. **1184.** $3x = 12$.
1185. $2x + 7 = 13$. **1186.** $5x - 3 = 17$.
1187. $7 - 6x = 1$. **1188.** $100 - 10x = 19 - x$.
1189. $5x + 2 + x = 20$. **1190.** $7 - 3x + x = 7$.
1191. $18 + 8x = 27 + 5x$. **1192.** $17 - x = 7x - 7$.

1193. $\frac{x}{7}=4.$

1194. $\frac{5}{x}=9.$

1195. $\frac{x}{5}+8=13.$

1196. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=5.$

1197. $\frac{2}{3}(7x-10)-\frac{1}{2}(50-x)=20.$

1198. $3x+\frac{2}{5}(x+3)-\frac{1}{2}(11x-37)=5.$

1199. $\frac{2}{3}(3x-5)-1=\frac{2}{3}(11-2x)+x.$

1200. $1-3\left(7\frac{1}{2}+x\right)+7\left(\frac{2}{3}x-\frac{5}{2}\right)+\frac{8}{3}x=0.$

1201. $4-\frac{7-3x}{5}=3-\frac{3-7x}{10}+\frac{x+1}{2}.$

1202. $\frac{4x-1}{3}-4=1-\frac{x-4}{6}+\frac{3x+5}{4}-4\frac{1}{4}.$

1203. $\frac{3x-4}{5}-\frac{3-4x}{7}=\frac{5x-6}{10}-\frac{9-10x}{14}.$

1204. $\frac{4x+9}{10}-\frac{x+5}{5}=\frac{7x-1}{25}-\frac{x+3}{20}.$

1205. $\frac{x-3}{7}-\frac{x-25}{5}=7-\frac{2+x}{4}.$

1206. $\frac{7x-2}{3}-\frac{4}{5}(x+3)+6=\frac{3(x+2)}{2}.$

1207. $3x-\frac{2x+5}{7}=16-\frac{7x+19}{2}-\frac{2x+1}{3}.$

1208. $\frac{2x-1}{2}+\frac{3x-2}{4}+\frac{5x-4}{8}=1-\frac{7x-6}{8}.$

1209. $\frac{13x+5}{2}-\frac{16x+5}{3}=\frac{11x+4}{3}-\frac{5x-1}{2}-x.$

1210. $\frac{5+3x}{2}-\frac{4x-7}{3}=\frac{16x-27}{21}-\frac{x+3}{5}.$

1211. $\frac{3x+4}{7}-\frac{9x+44}{5}=\frac{5x+12}{3}-\frac{9x+30}{4}.$

1212. $\frac{5x-2}{12}-\frac{3x-2}{40}=\frac{x-6}{18}+\frac{7x-4}{30}+\frac{2(2x+3)}{45}.$

1213. $\frac{5x+1}{4}+\frac{4x-1}{9}+\frac{x+5}{4}+\frac{x-1}{6}=2(x+1).$

1214. $\frac{3-x}{2}-\left(\frac{7-x}{3}-\frac{x+3}{4}\right)+\left(\frac{7-x}{6}-\frac{9+3x}{8}\right)+x=0.$

1215. $\frac{10}{x}+\frac{4}{9}=\frac{9}{x}+\frac{1}{2}$.

1216. $\frac{7}{x}+\frac{1}{3}=\frac{23-x}{3x}+\frac{7}{12}-\frac{1}{4x}$.

1217. $\frac{7}{3}+\frac{13}{5x}=\frac{13x-24}{3x}-\frac{37}{20}+\frac{10}{x}$.

1218. $\frac{10-x}{3}+\frac{13+x}{7}=\frac{7x+26}{x+21}-\frac{17+4x}{21}$.

1219. $\frac{6x+5}{8x-15}-\frac{1+8x}{15}=\frac{1-x}{3}+\frac{3-x}{5}$.

1220. $\frac{5}{x+3}+\frac{3}{2(x+3)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+3)}$.

1221. $\frac{2x+1}{3x-15}-\frac{x-11}{2x-10}=1$.

1222. $\frac{3x-5}{5x-5}+\frac{5x-1}{7x-7}+\frac{x-4}{x-1}=2$.

1223. $\frac{8x+2}{x-2}-\frac{2x-1}{3x-6}+\frac{3x+2}{5x-10}=10$.

1224. $\frac{3x-1}{2x-6}+\frac{5x-7}{3x-9}+\frac{7x+1}{4x-12}=11$.

1225. $\frac{4-2x}{3}-\frac{4}{6x-3}=\frac{1{,}5x}{x-0{,}5}-\frac{4x^2}{3(2x-1)}$.

1226. $\frac{5x-1}{7}:\frac{19-x}{4}=1:2$.

1227. $(x-3)(x-4)=(x-6)(x-2)$.

1228. $(2x+7)(x+3)=2(x+5)(x+2)$.

1229. $(x-8):(x-9)=(x-5):(x-7)$.

1230. $(x+1):(x+3)=(x-5):(x-7)$.

1231. $\frac{x-4}{x-5}=\frac{x-1}{x-3}$.

1232. $\frac{2x-1}{2(x-3)}=\frac{3(x-2)}{3x-1}$.

1233. $\frac{5}{7}\cdot\frac{2x-5}{3x-7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5x-2}{7x-3}$.

1234. $\frac{3}{4}\cdot\frac{4x-5}{3x-7}=\frac{5}{7}\cdot\frac{7x-3}{5x-4}$.

1235. $x+a=b$.

1236. $a-x=b$.

1237. $ax=b$.

1238. $mx-n=p$.

1239. $a-mx+b=-c$.

1240. $3a+2x-4b=5x-b$.

1241. $a(x-b)=c$.

1242. $4(x-a)=3x+5b$.

1243. $ab+(b+1)x=(a+x)b+a$.

1244. $2(3a+10x)+7(a-x)=13(a+b)$.

1245. $mx+nx=a$.

1246. $a-bx=cx-d$.

1247. $ax+x=m$.

1248. $a-bx=cx-x$.

1249. $a(x-1)-b=x-a.$

1250. $(a+b)x=m-cx.$

1251. $(a-b)x-c=d-(b-c)x.$

1252. $ab-(x-c)d=c(d+x).$

1253. $a(b-x)+b(c-x)=b(a-x)+cx.$

1254. $12ax-3b(x-a)-5a(2x+b)=0.$

1255. $(a+b)x+(a-b)x-ax=b+c.$

1256. $(a+b)x-(a-b)x-bx=a+c.$

1257. $(a-x)(b-x)=x^2.$

1258. $(a-x)(1-x)=x^2-b.$

1259. $(a-x)(1-x)=x^2-1.$

1260. $(a-x)(b+x)=a^2-x^2.$

1261. $(x-a)(x-b)=x^2-a^2.$

1262. $\frac{x}{a}=b.$

1263. $\frac{x}{a}-b=c.$

1264. $\frac{a}{x}-b=c.$

1265. $\frac{a}{x}-\frac{b}{x}=c.$

1266. $\frac{a}{x}-1=\frac{b}{x}-9.$

1267. $\frac{a-bx}{c}+b=\frac{bc-x}{c}.$

1268. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c.$

1269. $\frac{a-x}{b}=\frac{x-b}{a}.$

1270. $\frac{x-a}{a}-m=\frac{x-b}{b}-n.$

1271. $\frac{x+a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{x-b}{a}+\frac{a}{b}.$

1272. $\frac{a+b}{x}-c=d-\frac{a-b}{x}.$

1273. $\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{b}.$

1274. $\frac{x+a}{x-a}=m.$

1275. $\frac{a+x}{b+2x}=1.$

1276. $\frac{a}{a-x}=\frac{b}{b-x}.$

1277. $\frac{x+1}{x-1}=\frac{a+b}{a-b}.$

1278. $\frac{a+bx}{a+b}=\frac{c+dx}{c+d}.$

1279. $\frac{a-x}{b-x}=\frac{a+x}{b+x}.$

1280. $\frac{a}{b+x}-m=n.$

1281. $\frac{a}{mx}+\frac{b}{nx}=c.$

1282. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=d.$

1283. $\frac{ax}{b}+\frac{cx}{d}+\frac{fx}{g}=h.$

1284. $\frac{2x-a}{b}-\frac{b-2x}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}.$

1285. $\frac{ax}{b}-\frac{b}{a}(x-b)=a.$

1286. $\frac{a(2x+1)}{3b}-\frac{5ax-4b}{5b}=\frac{4}{5}.$

1287. $\frac{6a-bx}{2a}+\frac{9b-cx}{3b}+\frac{20c-dx}{5c}=10.$

1288. $\frac{3b(x-a)}{5a}+\frac{x-b^2}{15b}+\frac{b(4a+cx)}{6a}=0.$

1289. $\frac{ax}{b}-\frac{b-x}{2c}+\frac{a(b-x)}{3d}=a.$

1290. $\frac{a-x}{a}+\frac{b-x}{b}+\frac{c-x}{c}=3.$

1291. $\frac{ax-b^2}{a}-\frac{a(b-x)}{b}+\frac{b^2}{a}=a.$

1292. $\frac{a+1}{x}:\frac{b-1}{x}=(a+x):(b-x).$

1293. $\frac{ax+b}{x}:\frac{a}{d}=\frac{b}{a}:\frac{x}{cx+d}.$

1294. $\frac{a^2b-x}{a}+\frac{b^2c-x}{b}+\frac{ac^2-x}{c}=0.$

1295. $\frac{1-ax}{bc}+\frac{1-bx}{ac}+\frac{1-cx}{ab}=0.$

1296. $\frac{a-x}{bc}+\frac{b-x}{ac}+\frac{c-x}{ab}=0.$

1297. $\frac{a-bx}{bc}+\frac{b-cx}{ac}+\frac{c-ax}{ab}=0.$

1298. $\frac{a(b-x)}{bx}+\frac{b(c-a)}{cx}=\frac{a+b}{ab}-\left(\frac{1}{c}+\frac{a}{b}\right).$

1299. $(1+6x)^2+(2+8x)^2=(1+10x)^2.$

1300. $9\ (2x-7)^2+(4x-27)^2=13\ (4x+15)\ (x+6).$

1301. $(3-4x)^2+(4-4x)^2=(5+4x)^2.$

1302. $(2-x)\ (3-x)+(1-8x)\ (1-3x)=(1-5x)^2.$

1303. $(9-4x)\ (9-5x)+4\ (5-x)\ (5-4x)=36\ (2-x)^2.$

1304. $\frac{2x^2-3x+5}{7x^2-4x-2}=\frac{2}{7}.$

1305. $\frac{ax^2-bx+c}{mx^2-nx+p}=\frac{a}{m}.$

1306. $\frac{19x^7-x^8}{2}+x^8-2x^7=\frac{35x^7-x^8}{3}.$

1307. $\frac{13x^5+10x^4}{16}+x^5=55x^4+\frac{30x^4-x^5}{10}.$

1308. $\frac{4-x}{x^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{5,5}{3x}=\frac{67}{15x^2}-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3x^2}{5x^3}\right).$

1309. $8x^n-\frac{3}{4}x^{n+1}=7x^n+\frac{1}{4}x^{n+1}.$

1310. $\frac{2x^n+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^n-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^n+27x^{n-1}}{18}.$

1311. $\frac{x^{n+1}-ax^{n-1}}{bx}-\frac{ax^{n-1}-x^n}{b}=\frac{2x^n}{b}-ax^{n-2}$.

1312. $\frac{4x^2-3x}{1+x}-\frac{3x}{1-x}=\frac{4x^3+2x}{x^2-1}$.

1313. $\frac{x-9}{x-5}+\frac{x-5}{x-8}=2$.

1314. $\frac{x-16}{x-17}+\frac{x-14}{x-9}=2$.

1315. $\frac{x-12}{x-7}+\frac{x-4}{x-12}=2+\frac{7}{x-7}$.

1316. $\frac{x-8}{x+2}+\frac{x+12}{x-8}=2+\frac{18}{x+2}$.

1317. $\frac{3x-19}{x-13}+\frac{5x-25}{x+7}=8$.

1318. $\frac{x+50}{x-25}+\frac{2x-50}{x+50}=3$.

1319. $\frac{x-2}{2x+1}+\frac{x-1}{3(x-3)}=\frac{5}{6}$.

1320. $\frac{x+1}{4(x+2)}+\frac{x+4}{5x+13}=\frac{9}{20}$.

1321. $\frac{5(2x^2+3)}{2x+1}-\frac{7x-5}{2x-5}=5x-6$.

1322. $\frac{7x+55}{2x+5}-\frac{3x}{2}=9-\frac{3x^2+8}{2x-4}$.

1323. $\frac{2x-3}{x-4}+\frac{3x-2}{x-8}=\frac{5x^2-29x-4}{x^2-12x+32}$.

1324. $\frac{5x-1}{3(x+1)}-\frac{3x+2}{2(x-1)}=\frac{x^2-30x+2}{6x^2-6}$.

1325. $\frac{3x-7}{2x-9}-\frac{3(x+1)}{2(x+3)}=\frac{11x+3}{2x^2-3x-27}$.

1326. $\frac{7x-5}{3x-2}+\frac{8x-7}{3x-1}+\frac{10x+7}{9x^2-9x+2}=5$.

1327. $\frac{3}{x-7}+\frac{1}{x-9}=\frac{4}{x-8}$.

1328. $\frac{5}{x-17}+\frac{3}{x-19}=\frac{8}{x-18}$.

1329. $\frac{17}{x-16}+\frac{15}{x-18}=\frac{32}{x-17}$.

1330. $\frac{61}{x-38}+\frac{37}{x-62}=\frac{98}{x-50}$.

1331. $\frac{9}{x-7}-\frac{5}{x-8}=\frac{9}{x-2}-\frac{5}{x+1}$.

1332. $\frac{2}{x-14}-\frac{5}{x-13}=\frac{2}{x-9}-\frac{5}{x-11}$.

1333. $\frac{21}{x-98}-\frac{71}{x-94}=\frac{21}{x+44}-\frac{71}{x-52}$.

1334. $\frac{9}{x-51} \quad \frac{9}{x-15} = \frac{2}{x-81} - \frac{2}{x+81}.$

1335. $\frac{7}{x-6} + \frac{3}{x-11} = \frac{9}{x-7} + \frac{1}{x-12}.$

1336. $\frac{5}{x-6} + \frac{4}{x-9} = \frac{8}{x-7} + \frac{1}{x-10}.$

1337. $\frac{1}{x-6} + \frac{8}{x-3} = \frac{5}{x-2} + \frac{4}{x-5}.$

1338. $\frac{x-8}{x-3} + \frac{x-3}{x-5} + \frac{x-9}{x-7} = \frac{x-1}{x-3} + \frac{x-13}{x-5} + \frac{x-6}{x-7}.$

1339. $\frac{x+2}{x+7} + \frac{x+7}{x+5} + \frac{x+1}{x+3} = \frac{x+9}{x+7} + \frac{x-3}{x+5} + \frac{x+4}{x+3}.$

1340. $\frac{3x-5}{x-2} + \frac{5x-1}{x-3} = \frac{8x-17}{x-6}.$

1341. $\frac{5x-6}{x-3} + \frac{7x-8}{x-4} + \frac{4(3x-1)}{x-1}.$

1342. $\frac{3x-5}{x-3} + \frac{2x-5}{x-4} = \frac{35(x-2)}{7x-24}.$

1343. $\frac{2(x-1)}{x-7} + \frac{x+8}{x-4} = \frac{3(5x+16)}{5x-28}.$

1344. $a + b + \frac{x}{a+b} = a - b + \frac{x}{a-b}.$

1345. $\frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{x} = \frac{1}{a-b} + \frac{a-b}{x}.$

1346. $a^2b + \frac{a-x}{b} = ab^2 + \frac{b-x}{a}.$

1347. $\frac{a^2}{b}(x-a) - \frac{b+c}{ab}(a-2x) = \frac{b^2}{a}(a-x) + \frac{b+c}{b}.$

1348. $\frac{3(x-a)}{b} - \frac{2(x-b)}{a} = 1.$

1349. $\frac{3(x-2a)}{b} + \frac{2(x-3b)}{a} = 13.$

1350. $\frac{a-x}{b} - \frac{c}{a} = \frac{b-x}{a} - \frac{c}{b}.$

1351. $\frac{a+b-x}{c} + \frac{a+c-x}{b} + \frac{b+c-x}{a} + 3 = 0.$

1352. $\frac{a}{c} - \frac{ax}{cx-1} = \frac{c}{a} - \frac{cx}{ax-1}.$

1353. $\frac{b-x}{a+x} + \frac{c-x}{a-x} = \frac{a(c-2x)}{a^2-x^2}.$

1354. $\frac{ax+b}{ax-b}-\frac{bx}{ax+b}=\frac{ax}{ax-b}-\frac{(ax^2-2b)b}{a^2x^2-b^2}$.

1355. $\frac{ax}{mx-p}+\frac{cx}{nx-q}=\frac{a}{m}+\frac{c}{n}$.

1356. $\frac{x-a}{x-m}+\frac{x-b}{x-n}=2$.

1357. $\frac{ax+b}{x-m}+\frac{cx+d}{x-n}=a+c$.

1358. $\frac{m-n}{x-a}-\frac{a-b}{x-m}=\frac{m-n}{x-b}-\frac{a-b}{x-n}$.

1359. $\frac{b+d-c}{a}x+\frac{a+c-d}{b}=\frac{b+d-a}{c}+\frac{a+c-b}{d}x$.

1360. $a+b+(c+d)x=\frac{ab}{cd}(a+b)+\frac{cd}{ab}(c+d)x$.

1361. $\frac{a(x-3)}{b}+\frac{b(x-3)}{a}+\frac{a^2(x-1)}{b^2}+\frac{b^2(x-1)}{a^2}=4$.

1362. $\frac{a(3-2x)}{b}+\frac{b(3x-2)}{a}-\frac{a-bx}{2(a+b)}=2$.

1363. $\frac{a(2x-1)}{b}-\frac{b(x-2)}{a}-\frac{ax+b}{a-b}+2=0$.

1364. $\frac{(a+b)(x-b)}{ab}+(a-b)x=\frac{a^3-b^3}{a+b}+\frac{a}{b}$.

1365. $\frac{(a+c)(x-b)}{a^2}+\frac{(b+c)(x-2b)}{bc}+\frac{b(a+c)}{ac}+2=\frac{(2x-b)(a+b)}{ab}$.

1366. $\frac{a^2+b^2}{b}(x-a)+\frac{a^2-b^2}{a}(x-b)=2a(2a+b-x)$.

1367. $\frac{(a+1)}{b}x+\frac{(b+1)x}{a}+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$.

1368. $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2x}{ab}$.

1369. $\frac{(a+b)x}{c^2}+c-\frac{(b-c)x}{a-b}-\frac{a-d}{c}=\frac{(a+c)x}{a-b}-\frac{b-d}{c}$.

1370. $\frac{(a+1)x}{b}-\frac{(b+1)x}{a}+\frac{a(x-a)}{b^2}-\frac{b(x-b)}{a^2}=(a-b)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$.

1371. $\frac{ax+b}{mx-n}+\frac{cx+d}{px-q}=\frac{a}{m}+\frac{c}{p}$.

1372. $\frac{m-n}{x-a}+\frac{n-p}{x-b}+\frac{p-m}{x-c}=0$.

1373. $\frac{m}{x-a}+\frac{n}{x-b}+\frac{p}{x-c}=\frac{m}{x-c}+\frac{n}{x-a}+\frac{p}{x-b}$.

1374. $\frac{a+c}{a-b}-\frac{(3a-5c)x}{2a-3b}+\frac{(3a-2b)(x-1)}{a-b}=\frac{(5c-2b)x}{2a-3b}-\frac{a-c}{a-b}.$

1375. $\frac{ab(3-x)}{(a+b)^2}+\frac{ab(3x-1)}{(a-b)^2}+x-1=\frac{ab(x+1)}{a^2+b^2}.$

1376. $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}.$

1377. $\frac{(5a-3c)x}{2a^2}+2a-\frac{3ax}{3a-2c}-\frac{6a-5n}{2a}=\frac{5n-4c}{2a}-\frac{(3c-2a)x}{3a-2c}.$

1378. $\frac{bx}{2b-a}-\frac{(3bc+ad)x}{2ab(a+b)}-\frac{5ab}{3c-d}=\frac{(3bc-ad)x}{2ab(a-b)}-\frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}.$

1379. $\frac{x-bc}{a}+\frac{x-ac}{b}+\frac{x-ab}{c}=2\,(a+b+c).$

1380. $\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{3x}{a+b+c}=0.$

1381. $\frac{a(x-a)}{b+c}+\frac{b(x-b)}{a+c}+\frac{c(x-c)}{a+b}=x.$

1382. $\frac{(m-n)(x-a)}{b+c}+\frac{(n-p)(x-b)}{a+c}+\frac{(p-m)(x-c)}{a+b}=0.$

1383. $\frac{ax-1}{a^2(b+c)}+\frac{bx-1}{b^2(a+c)}+\frac{cx-1}{c^2(a+b)}=\frac{3x}{ab+ac+bc}.$

1384. $\frac{x+2ab}{a+b-c}+\frac{x-2ab}{a-b+c}=\frac{x+2ab}{a+b+c}+\frac{2ab-x}{b+c-a}.$

1385. $\frac{x-2a}{b+c-a}+\frac{x-2b}{a+c-b}+\frac{x-2c}{a+b-c}=3.$

ГЛАВА III.

Составленіе уравненій.

§ **116.** При помощи уравненій рѣшается масса ариѳметическихъ задачъ всевозможнаго рода. Извѣстно, что всякая ариѳметическая задача состоитъ въ томъ, что по нѣсколькимъ извѣстнымъ величинамъ и по той зависимости, которая существуетъ между извѣстными и неизвѣстными, находятся неизвѣстныя величины. Зависимость между извѣстными и неизвѣстными задачи всегда приводитъ къ составленію формулъ: *равенства* или *неравенства.* И тѣ задачи, въ которыхъ соотношенія между извѣстными и неизвѣстными можно выразить равенствомъ, рѣшаются при помощи уравненій.

Чтобы рѣшить какую-либо задачу при помощи уравненій, сначала надо изъ условія задачи составить уравненіе, затѣмъ рѣшить уравненіе, — тогда мы получимъ величину искомаго неизвѣстнаго. — Намъ уже извѣстно, какимъ образомъ рѣшаются уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ; разсмотримъ теперь, какъ составляются уравненія изъ условій задачи.

Чтобы составить уравненіе изъ условій задачи, прежде всего *обозначаютъ искомыя неизвѣстныя буквами* x, y, z и т. п., и *затѣмъ производятъ надъ этими буквами всѣ дѣйствія, которыя потребовались бы для повѣрки рѣшенія, если бы неизвѣстныя были уже найдены.* Поступая такимъ образомъ, мы можемъ получить два выраженія, которыя по смыслу должны быть равными. Соединивъ такія выраженія знакомъ равенства, мы получимъ уравненіе, которое остается рѣшить, чтобы получить искомое неизвѣстное.

Покажемъ на примѣрахъ, какъ это дѣлается.

1. *Какое число надо придать къ числителю и знаменателю дроби* $\frac{3}{16}$, *чтобы получить* $\frac{3}{4}$?

Обозначимъ искомое число черезъ x; тогда числитель дроби, которая должна получиться, когда мы придадимъ искомое число къ обоимъ членамъ дроби, будетъ: $3+x$, а знаменатель: $16+x$; самая же дробь выразится черезъ: $\frac{3+x}{16+x}$. Это послѣднее выраженіе, по условію задачи, должно равняться $\frac{3}{4}$; слѣдовательно, у насъ получилось уравненіе:

$$\frac{3+x}{16+x}=\frac{3}{4}.$$

Рѣшивъ его, найдемъ, что $x=36$, т.-е., къ числителю и знаменателю дроби $\frac{3}{16}$ надо придать по 36, чтобы получить $\frac{3}{4}$. Дѣйствительно, придавъ къ числителю и знаменателю данной дроби по 36, получимъ дробь: $\frac{39}{52}=\frac{3}{4}$.

Рѣшимъ эту задачу въ общемъ видѣ.

Какое число надо придать къ числителю и знаменателю дроби $\frac{a}{b}$, *чтобы получить дробь* $\frac{m}{n}$?

Разсуждая попредыдущему, получимъ уравненіе:

$$\frac{a+x}{b+x}=\frac{m}{n}.$$

Рѣшивъ его, найдемъ слѣдующее общее рѣшеніе для данной задачи: $x = \frac{bm - an}{n - m}$.

2. *Отцу 45 лѣтъ, а сыну 13. Черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ вдвое старше сына?*

Положимъ, что отецъ будетъ вдвое старше сына черезъ x лѣтъ. Тогда отецъ будетъ имѣть $45 + x$ лѣтъ, а сынъ $13 + x$. Но, по условію задачи, число лѣтъ отца должно быть въ два раза больше числа лѣтъ сына; слѣдовательно, выраженіе: $45 + x$ въ два раза больше выраженія: $13 + x$. Чтобы эти выраженія были равны, надо первое раздѣлить на 2; получимъ уравненіе:

$$\frac{45 + x}{2} = 13 + x.$$

Рѣшивъ его, найдемъ, что $x = 19$, т.-е., черезъ 19 лѣтъ отецъ будетъ вдвое старше сына. Дѣйствительно, черезъ 19 лѣтъ сыну будетъ $13 + 19 = 32$ года, а отцу $45 + 19 = 64$ года, т.-е., въ два раза болѣе.

3. *Въ бассейнъ проведены 2 трубы. Черезъ первую трубу онъ можетъ наполниться въ 24 часа, а черезъ вторую въ 36 часовъ. Во сколько часовъ бассейнъ наполнится, если открыть обѣ трубы?*

Обозначимъ искомое число часовъ черезъ x. Такъ какъ черезъ первую трубу весь бассейнъ наполняется въ 24 часа, то въ одинъ часъ вливается черезъ эту трубу $\frac{1}{24}$ часть бассейна, а въ x часовъ: $\frac{x}{24}$ частей. Черезъ вторую трубу въ 1 часъ вливается $\frac{1}{36}$ часть бассейна, а въ x часовъ: $\frac{x}{36}$ частей. Черезъ обѣ же трубы въ x часовъ вольется $\frac{x}{24} + \frac{x}{36}$ частей, что, согласно условію задачи, должно равняться объему полнаго бассейна.

Слѣдовательно, мы имѣемъ уравненіе:

$$\frac{x}{24} + \frac{x}{36} = 1.$$

Рѣшивъ его, найдемъ, что $x = 14{,}4$, т.-е., бассейнъ черезъ обѣ трубы наполнится въ 14,4 часа.

Рѣшимъ эту задачу въ общемъ видѣ.

Въ бассейнъ проведены 2 трубы. Черезъ первую трубу онъ можетъ наполниться въ **a** *часовъ, а черезъ вторую въ* **b** *часовъ. Во сколько часовъ бассейнъ наполнится, если открыть обѣ трубы?*

Разсуждая попредыдущему, получимъ уравненіе:

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1.$$

Рѣшивъ его, найдемъ, что $x=\frac{ab}{b+a}$.

4. *По скольку процентовъ надо отдать капиталы въ 15000 руб. и 10000 руб., чтобы черезъ 4 года процентныя деньги съ перваго были на 1200 рублей болѣе, чѣмъ со второго капитала?*

Пусть оба капитала отданы по x%. Тогда 100 рублей перваго капитала въ 4 года принесутъ процентныхъ денегъ $4x$ руб., а 15000 р. принесутъ $4x \cdot 150$ рублей. Второй же капиталъ въ то же время принесетъ процентныхъ денегъ $4x \cdot 100$ руб. Но, по условію задачи, первыя процентныя деньги больше вторыхъ на 1200 р.; слѣдовательно, имѣемъ уравненіе:

$$4x \cdot 150 - 4x \cdot 100 = 1200$$

Рѣшивъ его, получимъ, что $x=6$, т.-е., капиталы надо отдать по 6%.

Рѣшимъ эту задачу въ общемъ видѣ.

По скольку процентовъ надо отдать капиталы въ **a** *и* **b** *рублей, чтобы черезъ* **m** *лѣтъ процентныя деньги съ перваго капитала превышали процентныя деньги со второго капитала на* **d** *рублей?*

Пусть капиталы отданы по x%. Тогда первый капиталъ въ m лѣтъ принесетъ процентныхъ денегъ $\frac{x \cdot a \cdot m}{100}$ рублей, а второй $\frac{x \cdot b \cdot m}{100}$ руб.

По условію же задачи, первая прибыль должна быть болѣе второй на d руб.; слѣдовательно, мы имѣемъ уравненіе:

$$\frac{amx}{100}-\frac{bmx}{100}=d.$$

Откуда $x=\frac{100d}{m(a-b)}$.

§ **117.** До сихъ поръ мы рѣшали такія задачи, въ которыхъ требовалось найти одно неизвѣстное. Но часто при помощи уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ рѣшаются

и такія задачи, въ которыхъ приходится находить два и болѣе неизвѣстныхъ. Возможно это бываетъ тогда, когда зависимость между неизвѣстными настолько проста, что нѣтъ надобности каждое неизвѣстное обозначать отдѣльными буквами. Напр.:

1. *Найти два числа, сумма которыхъ равна 1200, а разность 300?*

Если мы большее изъ искомыхъ чиселъ обозначимъ черезъ x, то меньшее будетъ равно: $1200-x$. Изъ условія задачи имѣемъ уравненіе:

$$x-(1200-x)=300.$$

Откуда $x=750$, а меньшее число равно $1200-x=450$.

2. *Изъ двухъ сортовъ вина въ 10 руб. и 7 руб. 20 коп. ведро составлено 70 ведеръ смѣси, цѣною каждое ведро 8 руб. 40 коп. Сколько ведеръ взято отъ каждаго сорта?*

Обозначивъ число ведеръ перваго сорта черезъ x, получимъ, что второго сорта было $70-x$ ведеръ. Тогда вино перваго сорта стоило $10x$ руб., а вино второго сорта: $7{,}2(70-x)$. Вся смѣсь стоила: $10x+7{,}2(70-x)$, а одно ведро смѣси стоило въ 70 разъ меньше, а именно: $\frac{10x+7{,}2(70-x)}{70}$. Это послѣднее выраженіе, по условію задачи, равно 8,4. Слѣдовательно, имѣемъ уравненіе:

$$\frac{10x+7{,}2(70-x)}{70}=8{,}4.$$

Рѣшивъ его, получимъ, что $x=30$, т.-е., перваго сорта вина было взято 30 ведеръ, а второго $70-30=40$ ведеръ.

3. *Найти двузначное число, сумма цифръ котораго равна 13; если же цифры его написать въ обратномъ порядкѣ, то получится число, которое на 27 меньше искомаго числа.*

Обозначивъ цифру десятковъ черезъ x, получимъ, что цифра единицъ будетъ равна $13-x$. Самое же число будетъ равно: $10x+(13-x)$. Когда же мы перемѣнимъ порядокъ цифръ, то получимъ число: $10(13-x)+x$, которое, по условію, на 27 меньше искомаго числа. Слѣдовательно, мы имѣемъ уравненіе:

$$[10x+(13-x)]-[10(13-x)+x]=27.$$

Откуда $x=8$, т.-е., десятки искомаго числа обозначаются цифрой 8, а единицы $13-8=5$; самое же искомое число равно 85. Дѣйствительно, $85-58=27$.

4. *Мать купила нѣсколько орѣховъ и раздѣлила ихъ между дѣтьми такъ: старшему дала 10 орѣховъ и $\frac{1}{4}$ остатка, второму 20 орѣховъ и $\frac{1}{4}$ новаго остатка, третьему 30 орѣховъ и $\frac{1}{4}$ новаго*

остатка и т. д.; меньшему она отдала всѣ остальные орѣхи. Оказалось, что всѣ дѣти получили поровну. Сколько было куплено орѣховъ, сколько получило каждое дитя и сколько было дѣтей?

Въ этой задачѣ приходится найти три неизвѣстныхъ. Обозначимъ число орѣховъ черезъ x, тогда старшій ребенокъ получилъ $10+\frac{x-10}{4}$ орѣховъ, второй же 20 орѣховъ и еще $\frac{1}{4}$ остатка; чтобы получить этотъ остатокъ, мы должны отъ всего количества орѣховъ отнять то, что получилъ старшій, и еще 20 орѣховъ, которые получилъ второй, т.-е., остатокъ равенъ: $x-\left(10+\frac{x-10}{4}\right)-20$. Слѣдовательно, второй ребенокъ получилъ $20+\frac{x-\left(10+\frac{x-10}{4}\right)-20}{4}$. И это послѣднее выраженіе, по условію задачи, должно равняться тому, что получилъ старшій, т.-е., $10+\frac{x-10}{4}$. Итакъ, мы получили уравненіе:

$$10+\frac{x-10}{4}=20+\frac{x-\left(10+\frac{x-10}{4}\right)-20}{4}.$$

Рѣшивъ его, получимъ, что $x=90$, т.-е., мать купила 90 орѣховъ. Первый же ребенокъ (и вообще каждый) получилъ $10+\frac{x-10}{4}=10+\frac{90-10}{4}=30$. Число же дѣтей было $\frac{90}{30}=3$.

Задачи: 1386. Я задумалъ число; если къ $\frac{3}{5}$ этого числа прибавить 120, то получится задуманное число. Какое число я задумалъ?

1387. Если отъ $\frac{7}{8}$ нѣкотораго числа отнять 60, то полученная разность на 80 будетъ меньше искомаго числа. Найти это число.

1388. Найти число, которое увеличивается на 12, если мы умножимъ его на 16.

1389. Если неизвѣстное раздѣлимъ на 7 и къ частному придадимъ 60, то получимъ число, въ 3 раза большее искомаго числа. Найти это число.

1390. Найти число, которое уменьшается на 6,5, если мы раздѣлимъ его на 3,6.

1391. На какое число надо раздѣлить 720, чтобы получить въ частномъ 10 и въ остаткѣ 10?

1392. Если къ $\frac{7}{15}$ задуманнаго числа придать $\frac{7}{8}$ его и полученную сумму раздѣлить на 4, то въ частномъ получится число, которое на 638 меньше задуманнаго числа. Найти задуманное число.

1393. Найти число по слѣдующимъ условіямъ: если отъ него отнимемъ 200, разность увеличимъ въ 6 разъ и въ полученномъ числѣ зачеркнемъ на мѣстѣ единицъ нуль, то получится число на 246 меньше искомаго числа.

1394. Найти число по слѣдующимъ условіямъ: если къ нему прибавимъ 15, сумму раздѣлимъ на 23 и въ частномъ отбросимъ число единицъ, равное 4, то получимъ 2.

1395. Сколько разъ надо къ числу 320 прибавлять по 5,(3) и къ 404 по $2\frac{1}{2}$, чтобы первая сумма превышала вторую на 1?

1396. Какое число надо отнять 9 разъ отъ 460 и 15 разъ отъ 748, чтобы первая разность превышала вторую на 8?

1397. Какое число надо придать къ числителю дроби $\frac{7}{36}$, чтобы получить дробь $\frac{4}{9}$?

1398. Какое число надо придать къ числителю и знаменателю дроби $\frac{7}{25}$, чтобы получить дробь $\frac{4}{5}$?

1399. Какое число надо отнять отъ числителя и знаменателя дроби $\frac{17}{29}$, чтобы получить дробь $\frac{2}{5}$?

1400. Сколько разъ надо къ числителю дроби $\frac{40}{139}$ прибавлять по 15 и къ знаменателю по 16, чтобы получить дробь $\frac{20}{27}$?

1401. Нѣкто истратилъ на покупку книгъ $\frac{5}{8}$ и на покупку бумаги $\frac{5}{48}$ своихъ денегъ. Сколько онъ имѣлъ денегъ, если у него осталось еще 14 руб. 30 коп.?

1402. Помѣщикъ купилъ домъ, имѣніе и дачу. За домъ онъ заплатилъ $\frac{3}{16}$ своихъ денегъ, за дачу $\frac{8}{9}$ того, что за домъ, и за имѣніе половину своихъ денегъ. Сколько у помѣщика было денегъ, если у него послѣ покупокъ осталось еще 7000 рублей?

1403. Трое желаютъ купить имѣніе. Одинъ можетъ уплатить $\frac{3}{7}$ требуемой суммы, другой $\frac{5}{9}$ и третій $\frac{7}{11}$. Сколько стоитъ имѣніе, если извѣстно, что послѣ покупки у нихъ осталось 21500 рублей?

1404. Нѣкто третью часть своихъ доходовъ тратитъ на столъ, $\frac{1}{8}$ на одежду, $\frac{1}{10}$ на другіе расходы. Какъ великъ его доходъ, если онъ сберегаетъ еще въ годъ 636 рублей?

1405. Игрокъ въ первую игру проигралъ $\frac{4}{5}$ своихъ денегъ во вторую выигралъ $\frac{7}{15}$ и въ третью опять проигралъ $\frac{9}{20}$ своихъ денегъ. Сколько онъ имѣлъ денегъ съ собою, если по окончаніи игры у него осталось 39 рублей?

1406. Разносчикъ продалъ въ первый разъ $\frac{1}{5}$ бывшихъ у него апельсинъ и еще 5 апельсинъ, потомъ $\frac{1}{9}$ оставшихся и еще 2 апельсина, и въ третій разъ $\frac{1}{15}$ оставшихся и еще 20 апельсинъ. Сколько апельсинъ онъ имѣлъ, если послѣ продажи у него еще осталось $\frac{6}{11}$ частей прежняго количества?

1407. Изъ бассейна сначала отлили $\frac{2}{7}$ всего количества воды и еще 50 ведеръ, потомъ $\frac{3}{8}$ остатка и еще 60 ведеръ и наконецъ $\frac{4}{5}$ новаго остатка и еще 8 ведеръ. Сколько ведеръ воды было въ бассейнѣ, если въ немъ осталась $\frac{1}{21}$ часть всего количества воды?

1408. Я задумалъ число; если я прибавлю къ нему 8 и полученную сумму раздѣлю на 81, то частное будетъ на 94 меньше $\frac{1}{7}$ задуманнаго числа. Какое число я задумалъ?

1409. Купецъ, продавъ товаръ за 7551,6 рубля, получилъ 16% прибыли. Сколько ему самому стоилъ товаръ?

1410. Какой капиталъ, отданный по 6%*), въ $4\frac{1}{2}$ мѣсяца приноситъ 2736 рублей процентныхъ денегъ?

1411. Нѣкто отдалъ $\frac{2}{5}$ своего капитала по 5%, $\frac{3}{8}$ капитала по 4% и остальную часть по 7%. Какой капиталъ онъ имѣлъ, если общая прибыль со всѣхъ частей въ 1 годъ равна 2030 р.?

1412. Помѣщикъ продалъ имѣніе и $\frac{3}{10}$ вырученной суммы положилъ въ банкъ по $4\frac{1}{2}$%; на $\frac{5}{8}$ частей оставшихся денегъ купилъ по номинальной цѣнѣ процентныхъ бумагъ, приносящихъ 4% годового дохода, а остальную сумму отдалъ въ долгъ по 9%. За сколько онъ продалъ имѣніе, если извѣстно, что общая прибыль со всего капитала въ пять лѣтъ равна 8740 руб.?

1413. Нѣкто отдѣлъ $\frac{9}{16}$ своего капитала по 8% и остальную часть по 9%. Опредѣлить капиталъ, если извѣстно, что прибыль, полученная съ первой части въ 5 мѣсяцевъ, превышаетъ прибыль, полученную со второй части въ 4 мѣсяца, на 4 р. 50 коп.

1414. По скольку процентовъ надо отдать капиталы: 6800 р. и 5200 рублей, чтобы прибыль съ перваго въ четыре года превышала прибыль со второго капитала въ 5 лѣтъ на 60 рублей?

1415. Капиталъ въ 54000 рублей былъ раздѣленъ на двѣ части, изъ которыхъ первая превышала вторую на 8000 рублей. Первая часть была отдана въ долгъ по 6%, а вторая по 8%. Во сколько времени доходъ съ первой части превыситъ доходъ со второй части на 100 рублей?

1416. Найти учетъ**) векселя въ 5200 рублей по 6% за 10 мѣсяцевъ до срока.

1417. По скольку процентовъ данъ вексель, если учетъ составляетъ 80 руб. 50 коп. съ 920 руб. за 1 г. 3 мѣсяца до срока?

1418. За 10 мѣсяцевъ до срока былъ проданъ вексель за 3022 рубля; при чемъ съ $\frac{9}{20}$ вексельной суммы былъ сдѣланъ учетъ по 7,5%, а съ остальной по 6%. Опредѣлить валюту векселя.

1419. Банкиръ учелъ два векселя: одинъ въ 1400 рублей за 5 мѣсяцевъ до срока, а другой въ 900 руб. за 4 мѣсяца; за первый вексель онъ заплатилъ 483 рублями больше, чѣмъ за второй. По скольку процентовъ сдѣланъ учетъ?

1420. Отцу 44 года, а сыну 8 лѣтъ; черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ старше сына въ 4 раза?

1421. Брату 24 года, а сестрѣ 18 лѣтъ; сколько лѣтъ тому назадъ братъ былъ въ 4 раза старше сестры?

1422. Въ одномъ бассейнѣ 168 ведеръ, а въ другомъ 8 ведеръ воды. Въ каждый изъ нихъ проведено по трубѣ, дающей въ минуту 8 ведеръ воды. На сколько минутъ надо открыть обѣ трубы, чтобы во второмъ бассейнѣ было втрое меньше воды, чѣмъ въ первомъ?

---

*) Въ этой и слѣдующихъ задачахъ проценты разумѣются простые.

**) Учетъ въ этой и слѣдующихъ задачахъ разумѣется коммерческій.

1423. Въ одномъ бассейнѣ 600 ведеръ, а въ другомъ 520 ведеръ воды. Сколько разъ надо изъ каждаго выливать по 5 ведеръ, чтобы въ первомъ бассейнѣ осталось въ 5 разъ болѣе воды, чѣмъ во второмъ?

1424. Въ одномъ резервуарѣ было 640 ведеръ, а въ другомъ 120 ведеръ воды. Изъ перваго вылили вдвое больше воды, чѣмъ ко второму прилили, и, несмотря на это, въ первомъ оказалось втрое больше воды, чѣмъ во второмъ. Сколько ведеръ воды вылили изъ перваго резервуара?

1425. Для перевозки 40 зеркалъ нанятъ извозчикъ съ условіемъ платить ему 1 р. 25 к. за доставку каждаго зеркала въ цѣлости и высчитывать съ него по 6 рублей за каждое разбитое зеркало. На дорогѣ извозчикъ разбилъ нѣсколько зеркалъ и вслѣдствіе этого получилъ за перевозку только 21 руб. Сколько зеркалъ доставилъ онъ въ цѣлости?

1426. Отецъ далъ сыну рѣшить 32 задачи съ условіемъ платить ему по 8 коп. за каждую рѣшенную вѣрно задачу и высчитывать съ него по 12 коп. за каждую нерѣшенную задачу. Сколько задачъ мальчикъ рѣшилъ вѣрно, если онъ получилъ отъ отца 1 р. 16 к.?

1427. Нанятъ рабочій съ условіемъ платить ему по 80 коп. за каждый рабочій день и высчитывать съ него по 30 коп. за каждый нерабочій день. Сколько было дней рабочихъ, если работникъ по прошествіи 50 дней получилъ 27 руб. 90 коп.?

1428. А и Б играли на билліардѣ съ условіемъ платить другъ другу за каждую проигранную партію по 75 коп.; послѣ сыгранныхъ 18 партій А получилъ отъ Б 6 рублей. Сколько партій проигралъ Б?

1429. Сумма двухъ чиселъ равна 156. Чему равно каждое число, если извѣстно, что первое больше второго въ 8 разъ?

1430. Въ двухъ кошелькахъ лежитъ 620 рублей. Сколько денегъ въ каждомъ, если извѣстно, что въ первомъ въ три раза меньше, чѣмъ во второмъ?

1431. Два куска желѣза вѣсятъ 72 фунта. Вѣсъ перваго относится къ вѣсу второго, какъ 11 : 13. Найти вѣсъ каждаго.

1432. Разность и частное двухъ чиселъ равны 60; найти эти числа.

1433. Сплавъ вѣсомъ въ 4 пуд. 20 фун. состоялъ изъ мѣди и олова. Сколько было того и другого металла въ сплавѣ, если мѣди было на 24 фунта больше олова?

1434. Когда А истратилъ шестую часть своего капитала, а Б пятую часть, то у нихъ осталось поровну. Найти капиталъ каждаго, если извѣстно, что вдвоемъ они имѣли 24500 рублей.

1435. Нѣкто, отдавъ часть своего капитала по 6% и другую по $4\frac{1}{2}$%, получаетъ ежегодно дохода 1290 рублей. Какую сумму онъ отдалъ по 6% и какую по $4\frac{1}{2}$%, если весь капиталъ равенъ 22000 рублямъ?

1436. Одинъ мальчикъ имѣетъ въ пять разъ болѣе орѣховъ, чѣмъ другой. Если онъ дастъ второму 28 орѣховъ, то у обоихъ будетъ поровну. Сколько орѣховъ имѣетъ каждый мальчикъ?

1437. А имѣлъ въ три раза болѣе денегъ, чѣмъ Б. Когда А проигралъ Б 140 рублей, то у послѣдняго оказалось въ пять разъ болѣе, чѣмъ у перваго. Сколько денегъ имѣлъ каждый?

1438. Куплено 200 головъ скота: коровъ и овецъ, за 3608 р. Сколько было коровъ и сколько овецъ, если за корову платили 40 рублей, а за овцу 4 рубля?

1439. Для починки дома нанято 40 рабочихъ: плотниковъ и столяровъ, при чемъ каждый плотникъ получалъ 90 коп. въ день, а каждый столяръ 1 руб. 25 коп. Сколько было плотниковъ и сколько столяровъ, если всѣ они въ день получали 41 руб., 60 коп.?

1440. Для починки дома нанято 60 рабочихъ: плотниковъ и столяровъ, при чемъ каждый плотникъ получалъ по 80 коп., а столяръ по 1 руб., 30 коп. въ день. Сколько было тѣхъ и другихъ рабочихъ, если извѣстно, что плотники за семидневную работу получили на 19 руб., 80 коп. больше, чѣмъ столяры за десятидневную?

1441. Два курьера выѣхали въ одно время изъ двухъ городовъ, разстояніе между которыми равно 160 верст., и ѣдутъ навстрѣчу другъ другу. Первый проѣзжаетъ въ часъ 12 верстъ, а второй 13 верстъ. Черезъ сколько часовъ они встрѣтятся?

1442. Въ бассейнъ, вмѣщающій 720 ведеръ, проведено двѣ трубы. Черезъ первую трубу вливается въ минуту 6 ведеръ, а черезъ вторую — 9 ведеръ. Во сколько времени бассейнъ наполнится, если открыть обѣ трубы вмѣстѣ?

1443. Два поѣзда вышли въ одно время изъ двухъ станцій, лежащихъ на разстояніи 228 верстъ, и идутъ въ одну сторону со скоростью $35\frac{3}{4}$ и $26\frac{1}{4}$ версты въ часъ, при чемъ первый поѣздъ догоняетъ второй. Во сколько часовъ онъ догонитъ?

1444. Въ бассейнъ, вмѣщающій 1080 ведеръ, проведены три трубы. Черезъ первую трубу вливается въ часъ 120 ведеръ, черезъ вторую 160 вед., а черезъ третью вытекаетъ въ часъ 190 ведеръ. Во сколько часовъ наполнится бассейнъ, если открыть всѣ трубы сразу?

1445. Стрѣляли изъ двухъ пушекъ. Одна уже произвела 40 выстрѣловъ, когда вторая начала дѣйствовать; первая дѣлаетъ 9 выстрѣловъ въ то время, когда вторая успѣваетъ сдѣлать ихъ 7; на каждый зарядъ первой пушки идетъ 30 лотовъ пороху, а на зарядъ второй 1 фунтъ, 18 лотовъ. Сколько выстрѣловъ должна сдѣлать первая и вторая пушки, чтобы издержать по одинаковому количеству пороха?

1446. Изъ двухъ сортовъ чаю, цѣною въ 1 руб., 50 коп. и 2 руб., 20 коп., сдѣлано 35 фунтовъ смѣси, стоимостью 1 руб., 80 коп. фунтъ. Сколько фунтовъ взято отъ каждаго сорта?

1447. Сплавъ серебра и мѣди, вѣсомъ въ 37 фунтовъ, теряетъ въ водѣ $3\frac{2}{3}$ фунта. Сколько въ немъ того и другого металла, если извѣстно, что фунтъ серебра теряетъ въ водѣ $\frac{2}{21}$ фунта, а фунтъ мѣди $\frac{1}{9}$ ф.?

1448. Сплавъ изъ золота и серебра, вѣсомъ въ 60 фунтовъ, будучи погруженъ въ воду, теряетъ $4\frac{24}{133}$ фунта. Сколько въ немъ того и другого металла, если удѣльный вѣсъ золота 19, а серебра 10,5?

1449. Сплавъ изъ двухъ металловъ вѣситъ въ воздухѣ 48 ф., а въ водѣ $42\frac{1}{24}$ фун. Сколько въ немъ того и другого металла, если 8 фунтовъ перваго теряютъ въ водѣ $\frac{3}{4}$ фунта, а 6 фунтовъ второго $\frac{7}{8}$ фунта?

1450. Золотыхъ дѣлъ мастеръ имѣетъ золото 72-й и 56-й пробы. Сколько золотниковъ отъ каждаго сорта онъ долженъ взять, чтобы получить 24 лота золота 60-й пробы?

1451. Золотыхъ дѣлъ мастеръ имѣетъ 20 фунтовъ серебра 84-й пробы. Сколько фунтовъ мѣди надо сплавить съ этимъ серебромъ, чтобы получить серебро 64-й пробы?

1452. Въ одной бочкѣ содержится смѣсь, составленная изъ 70 ведеръ спирту и 30 ведеръ воды. Въ другой же составлена смѣсь изъ 10 ведеръ спирта и 24 ведеръ воды. Сколько ведеръ смѣси надо перелить изъ первой бочки во вторую, чтобы въ ней образовалась смѣсь, содержащая спиртъ и воду поровну?

1453. Въ бочкѣ помѣщается 15 ведеръ спирту въ 60 градусовъ. Сколько ведеръ спирту въ 80 градусовъ надо прилить въ эту бочку, чтобы получить спиртъ въ 75 градусовъ?

1454. Въ бочкѣ помѣщается 20 ведеръ спирту въ 90 градусовъ. Сколько ведеръ спирту въ 40 градусовъ надо прилить въ эту бочку, чтобы получить спиртъ въ 65 градусовъ?

1455. Имѣется два сплава: одинъ состоитъ изъ 38 фунтовъ серебра и 12 фунтовъ мѣди, а другой изъ 3 фунтовъ серебра и 16 фун. мѣди. Со сколькими фунтами перваго сплава надо сплавить второй, чтобы получить слитокъ, содержащій серебро и мѣдь поровну?

1456. Сколько надо прибавить серебра 84-й пробы къ 6 фунтамъ 48-й пробы, чтобы получить сплавъ 72-й пробы?

1457. Найти двузначное число, сумма цифръ котораго равна 11; если же цифры этого числа написать въ обратномъ порядкѣ, то получимъ число, которое на 27 меньше искомаго.

1458. Найти двузначное число, единицы котораго въ 4 раза больше цифры десятковъ; если же цифры этого числа написать въ обратномъ порядкѣ, то получится число, которое на 54 больше искомаго.

1459. Если къ задуманному двузначному числу, сумма цифръ котораго равна 13, прибавимъ 45, то получимъ также двузначное число, изображенное тѣми же цифрами, но въ обратномъ порядкѣ. Найти задуманное число.

1460. Сумма двухъ двузначныхъ чиселъ равна 84; если же къ каждому изъ этихъ чиселъ приписать съ правой стороны цифры другого, не измѣняя ихъ порядка, то полученныя такимъ образомъ четырехзначныя числа будутъ относиться между собою какъ 403 : 304. Найти эти числа.

1461. Я задумалъ число; если къ нему припишемъ справа 9, къ результату прибавимъ 25; затѣмъ, къ полученной суммѣ припишемъ справа опять 9 и къ результату прибавимъ 3; наконецъ, полученную сумму раздѣлимъ на 24 и въ частномъ зачеркнемъ число единицъ, равное задуманному числу, то получимъ 4. Какое число я задумалъ?

1462. Я задумалъ однозначное число; если приписать къ нему справа 7 и къ результату прибавить 2; затѣмъ, къ полученному числу приписать справа 5 и прибавить единицу; наконецъ, полученную сумму раздѣлить на 12, — то въ частномъ получится двузначное число, десятки и единицы котораго будутъ изображены задуманнымъ числомъ. Какое число я задумалъ?

1463. Въ бассейнъ проведены двѣ трубы; черезъ первую можетъ онъ наполниться въ 12 часовъ, а черезъ вторую въ 16 часовъ. Черезъ сколько часовъ наполнится пустой бассейнъ, если открыть обѣ трубы?

1464. Для переписки одного сочиненія наняты два писца. Одинъ берется окончить работу въ $7\frac{1}{2}$ часовъ, а другой въ 5 часовъ. Во сколько часовъ они могутъ кончить работу вмѣстѣ?

1465. Два работника могутъ окончить нѣкоторую работу въ 9 часовъ, одинъ же второй можетъ окончить ее въ 15 часовъ. Во сколько часовъ можетъ окончить эту работу первый работникъ?

1466. Въ бассейнъ проведены двѣ трубы; черезъ первую трубу онъ можетъ наполниться въ 8 часовъ, а черезъ вторую вся вода можетъ вытечь въ 12 часовъ. Во сколько времени можетъ наполниться пустой бассейнъ, если открыть обѣ трубы сразу?

1467. Въ бассейнъ проведены три трубы; черезъ первую трубу бассейнъ можетъ наполниться въ 6 часовъ, черезъ вторую въ 8 часовъ, а черезъ третью вся вода можетъ вытечь въ 4 часа. Во сколько времени можетъ наполниться бассейнъ, если открыть всѣ трубы вмѣстѣ?

1468. Изъ города А выѣхали два курьера и ѣдутъ по одному направленію со скоростью: первый 10 верстъ въ часъ, а второй — 12 верстъ. На какомъ разстояніи отъ А второй догонитъ перваго, если извѣстно, что первый выѣхалъ раньше второго на 6 часовъ?

1469. Изъ двухъ станцій А и Б, находящихся на разстояніи 120 верстъ, вышли въ одно время два поѣзда и двигаются въ одну сторону такъ, что поѣздъ, вышедшій изъ А, догоняетъ поѣздъ, вышедшій изъ Б. На какомъ разстояніи отъ Б догонитъ первый поѣздъ, если въ часъ онъ проходитъ 36 верстъ, а второй въ часъ проходитъ 28 верстъ?

1470. Въ бассейнъ проведены 3 трубы; черезъ первую онъ наполняется въ 4 часа, черезъ вторую вода вся можетъ вытечь въ 5 часовъ и черезъ третью въ 6 часовъ. Во сколько времени опорожнится полный бассейнъ, если открыть сразу всѣ трубы?

1471. Въ 12 часовъ стрѣлки часовъ совпадаютъ. Когда и сколько разъ въ теченіе полусутокъ минутная и часовая стрѣлки опять будутъ вмѣстѣ?

1472. Въ шесть часовъ минутная и часовая стрѣлки образуютъ прямую линію. Когда въ первый разъ послѣ 6 часовъ стрѣлки опять будутъ стоять по противоположнымъ направленіямъ?

1473. Купецъ имѣлъ кусокъ сукна и разсчиталъ, что если онъ станетъ продавать сукно по 6 рублей аршинъ, то понесетъ убытка на всемъ кускѣ 12 рублей; если же станетъ продавать по 7 рублей, 50 коп., то получитъ 24 руб. прибыли. Сколько было аршинъ сукна въ кускѣ?

1474. Нѣкоторая сумма денегъ раздѣлена между 3 лицами такъ, что первый получилъ $\frac{4}{5}$ всей суммы безъ 400 рублей, второй $\frac{3}{4}$ всей суммы безъ 200 рублей и третій $\frac{2}{3}$ всей суммы безъ 130 рублей. Какъ велика была сумма, и сколько получилъ каждый?

1475. Нѣсколько лицъ получили наслѣдство и раздѣлили его такъ: первый получилъ 1000 руб. и $\frac{1}{5}$ часть остатка, второй 2000 руб. и $\frac{1}{5}$ часть новаго остатка, третій 3000 руб. и $\frac{1}{5}$ часть слѣдующаго остатка и т. д. Оказалось, что всѣ получили поровну. Какъ велико было наслѣдство, сколько было наслѣдниковъ и сколько получилъ каждый?

1476. Нѣсколько лицъ получили наслѣдство и раздѣлили его такъ: первый получилъ $\frac{1}{5}$ всего наслѣдства и еще 1000 рублей, второй $\frac{1}{5}$ остатка и 2000 руб., третій $\frac{1}{5}$ слѣдующаго остатка и 3000 руб. и т. д. Оказалось, что всѣ получили поровну. Какъ велико было наслѣдство, сколько было наслѣдниковъ и сколько получилъ каждый?

1477. Сумма двухъ чиселъ 64, а разность квадратовъ ихъ 512. Найти эти числа.

1478. Разность двухъ чиселъ равна 65, а разность квадратовъ ихъ $=$ 6305. Найти эти числа.

1479. Площадь квадрата увеличивается на 144 квадр. фута, если каждую сторону его увеличить на 2 фута. Чему равна сторона квадрата?

1480. Площадь квадрата уменьшается на 1248 квадратныхъ аршинъ, если каждую сторону его уменьшимъ на 16 аршинъ. Чему равна сторона квадрата?

1481. Сумма двухъ сторонъ прямоугольника равна 25 футамъ. Найти эти стороны, если извѣстно, что площадь прямоугольника увеличится на 140 кв. футовъ, если одну сторону увеличить на 4 фута, а другую на 5 футовъ?

1482 Периметръ прямоугольника равенъ 80 аршинамъ. Найти стороны его, если извѣстно, что площадь его уменьшается на 115 кв. аршинъ, если мы основаніе его увеличимъ на 7 аршинъ, а высоту уменьшимъ на 5 аршинъ.

1483. Периметръ прямоугольнаго треугольника равенъ 40 футамъ, а одинъ катетъ 8 футамъ. Найти гипотенузу.

1484. Периметръ прямоугольнаго треугольника равенъ 115 аршинамъ, а одинъ катетъ 15 арш. Чему равна гипотенуза?

1485. Периметръ прямоугольнаго треугольника равенъ 16 дюймамъ, а перпендикуляръ, опущенный на гипотенузу изъ вершины прямого угла, 4 дюймамъ. Найти гипотенузу. (См. задачу № 1515.)

1486. Площадь круга увеличивается на 100 кв. дюймовъ при увеличеніи радіуса на одинъ дюймъ. Найти радіусъ круга. ($\pi = 3,14$).

Задачи въ общемъ видѣ:

1487. Я задумалъ число; если къ $\frac{1}{n}$ части его прибавить a, то получится задуманное число. Какое число я задумалъ?

1488. Найти число, которое увеличится на a, если мы умножимъ его на b.

1489. Нѣкто истратилъ на покупку книгъ $\frac{1}{m}$ и на покупку бумаги $\frac{1}{n}$ часть своихъ денегъ. Сколько онъ имѣлъ денегъ, если у него осталось a руб.?

1490. Игрокъ въ первую игру проигралъ $\frac{1}{m}$ часть своихъ денегъ, во вторую выигралъ $\frac{1}{n}$ и въ третью опять проигралъ $\frac{1}{p}$ часть своихъ денегъ. Сколько онъ имѣлъ денегъ съ собою, если послѣ игры у него оказалось a рублей?

1491. Какой капиталъ надо отдать по p% на t лѣтъ, чтобы онъ принесъ процентныхъ денегъ a рублей?

1492. Нѣкто отдалъ $\frac{1}{m}$ часть своего капитала по p%, $\frac{1}{n}$ часть по p_1% и остальную часть по p_2%. Какой онъ имѣлъ капиталъ, если общая прибыль со всѣхъ трехъ частей въ одинъ годъ равна a руб.?

1493. Найти учетъ векселя въ a руб., уплоченнаго за t мѣсяцевъ до срока по p%.

1494. По скольку процентовъ данъ вексель, если учетъ составляетъ a руб. съ c руб. за t лѣтъ до срока?

1495. Въ одномъ бассейнѣ a ведеръ, а въ другомъ b ведеръ воды. Въ каждый изъ нихъ проведено по трубѣ, дающей въ минуту по c ведеръ воды. На сколько минутъ надо открыть обѣ трубы, чтобы во второмъ бассейнѣ было въ n разъ меньше воды, чѣмъ въ первомъ?

1496. Отецъ далъ сыну рѣшить a задачъ съ условіемъ платить ему по m коп. за каждую рѣшенную вѣрно задачу и

высчитывать съ него по b коп. за каждую не рѣшенную задачу. Сколько задачъ рѣшилъ мальчикъ вѣрно, если онъ получилъ отъ отца p коп.?

1497. Въ двухъ кошелькахъ лежитъ a руб. Сколько денегъ въ каждомъ, если извѣстно, что въ первомъ въ n разъ меньше, чѣмъ во второмъ?

1498. Разность и частное двухъ чиселъ равно a; найти эти числа.

1499. Когда А истратилъ $\frac{1}{m}$ часть своего капитала, а Б $\frac{1}{n}$ часть, то у нихъ осталось поровну. Найти капиталъ каждаго, если извѣстно, что вдвоемъ они имѣли a рублей.

1500. Для починки дома нанято a рабочихъ: плотниковъ и столяровъ, при чемъ каждый плотникъ получалъ по k копеекъ, а столяръ по k_1 коп. въ день. Сколько было тѣхъ и другихъ рабочихъ, если извѣстно, что плотники за m дней работы получили на b рублей болѣе, чѣмъ столяры за n дней работы?

1501. Два тѣла движутся навстрѣчу одно другому изъ двухъ мѣстъ, лежащихъ на разстояніи d футовъ. Первое движется со скоростью v футовъ въ секунду, а второе v_1 фут. въ секунду. Черезъ сколько секундъ они встрѣтятся?

1502. Два поѣзда вышли въ одно время изъ двухъ станцій, разстояніе между которыми $= a$ вер., и идутъ въ одну сторону со скоростью v_1 и v_2 верстъ въ часъ, при чемъ первый поѣздъ догоняетъ второй. Черезъ сколько часовъ онъ догонитъ?

1503. Изъ двухъ сортовъ чаю въ a руб. и b руб. за фунтъ составлено s фунтовъ смѣси по c рублей за фунтъ. Сколько взято чаю отъ каждаго сорта?

1504. a фунтовъ сплава изъ двухъ металловъ вѣсятъ въ водѣ k фунтовъ. Сколько въ немъ того и другого металла, если b фун. перваго теряютъ въ водѣ v фунтовъ и b_1 фунт. второго теряютъ v_1 фунтовъ?

1505. Въ одной бочкѣ содержится смѣсь, состоящая изъ a ведеръ спирта и b ведеръ воды. Въ другой же составлена смѣсь изъ a_1 ведеръ спирта и b_1 ведеръ воды. Сколько ведеръ смѣси надо перелить изъ первой бочки во вторую, чтобы образовать смѣсь, содержащую спиртъ и воду поровну?

1506. Сколько надо прибавить серебра 80-й пробы къ a фунтамъ 48-й пробы, чтобы получить сплавъ 72-й пробы?

1507. Въ бассейнъ проведены двѣ трубы; черезъ первую трубу онъ можетъ наполниться въ a часовъ, а черезъ вторую вся вода можетъ вытечь въ b часовъ. Во сколько времени можетъ наполниться пустой бассейнъ, если открыть обѣ трубы сразу?

1508. Изъ города А выѣхали два курьера и ѣдутъ по одному направленію; первый проѣзжаетъ въ часъ v верстъ, а второй v_1

верстъ. На какомъ разстояніи отъ A второй курьеръ догонитъ перваго, если извѣстно, что первый выѣхалъ раньше второго на n часовъ?

1509. Въ бассейнъ проведены 3 трубы. Черезъ первую трубу онъ можетъ наполниться въ a часовъ, черезъ вторую вся вода можетъ вытечь въ b часовъ и черезъ третью въ c часовъ. Во сколько времени опорожнится полный бассейнъ, если открыть всѣ трубы?

1510. Купецъ имѣлъ кусокъ сукна и разсчиталъ, что если онъ станетъ продавать по a руб. за аршинъ, то понесетъ убытка на всемъ суднѣ c рублей; если же станетъ продавать по a_1 руб., то получитъ c_1 рублей прибыли; сколько было аршинъ сукна въ кускѣ?

1511. Сумма двухъ чиселъ $= a$, а разность квадратовъ ихъ равна b^2. Найти эти числа.

1512. Площадь квадрата увеличивается на a^2, если сторону его увеличить на b. Чему равна сторона квадрата?

1513. Сумма двухъ сторонъ прямоугольника равна a. Найти эти стороны, если извѣстно, что площадь прямоугольника увеличивается на p^2, если одну сторону его увеличить на k, а другую на k_1.

1514. Периметръ прямоугольнаго треугольника равенъ p, а одинъ катетъ b; найти гипотенузу.

1515. Периметръ прямоугольнаго треугольника равенъ p, а перпендикуляръ, опущенный на гипотенузу, равенъ h; найти гипотенузу.

ГЛАВА IV.

Рѣшеніе уравненій съ двумя и болѣе неизвѣстными.

§ **118.** Общій видъ уравненія, содержащаго два неизвѣстныхъ, есть:

$$ax + by = c,$$

гдѣ a, b и c означаютъ какія-нибудь извѣстныя цѣлыя количества. Очевидно, что всякое уравненіе съ двумя неизвѣстными можно привести къ этому виду. Для этого нужно сдѣлать всѣ упрощенія, указанныя при рѣшеніи уравненій съ однимъ неизвѣстнымъ (§ **114**), т.-е., надо освободить уравненіе отъ дробныхъ членовъ, раскрыть скобки, перенести неизвѣстные члены въ одну сторону, а извѣстные въ другую и, наконецъ, сдѣлать приведеніе

подобныхъ членовъ, — въ буквенныхъ же уравненіяхъ вынести x и y общими множителями за скобки. Напримѣръ:

$$2x - \frac{x-3y}{4} = 7 + \frac{5+y}{3}.$$

1) $24x - 3(x-3y) = 84 + 4(5+y)$.
2) $24x - 3x + 9y = 84 + 20 + 4y$.
3) $24x - 3x + 9y - 4y = 84 + 20$.
4) $21x + 5y = 104$.

§ **119.** Одно уравненіе съ двумя неизвѣстными имѣетъ *безчисленное множество корней.* Такъ, въ уравненіи:

$$3x - 2y = 6,$$

если мы допустимъ, что $y = 0, 1, 2, 3 \ldots$ и т. д., то получимъ для x слѣдующіе корни:

если $y = 0$, то $x = \dfrac{6+2y}{3} = 2$;
" $y = 1$, " $x = 2\frac{2}{3}$;
" $y = 2$, " $x = 3\frac{1}{3}$ и т. д.

Такія уравненія, которыя имѣютъ безчисленное множество корней, называются **неопредѣленными.**

Если же мы имѣемъ *два* уравненія съ двумя неизвѣстными, то большею частью такія уравненія для каждаго неизвѣстнаго имѣютъ по одному корню. Такъ, въ уравненіяхъ:

$$3x - 2y = 6 \text{ и } 3y - 2x = 1$$

корни суть: $x = 4$, а $y = 3$. Только при этихъ корняхъ оба уравненія обращаются въ тождества.

§ **120. Система уравненій.** Два или нѣсколько уравненій составляютъ систему уравненій.

Рѣшить систему уравненій значитъ найти такія количества, которыя, будучи подставлены на мѣсто неизвѣстныхъ, обращаютъ всѣ данныя уравненія въ тождества.

Рѣшеніе системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными приводится къ тому, что изъ данныхъ двухъ уравненій составляется одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ. Такъ какъ при

этомъ исключается изъ уравненій одно неизвѣстное, то составленіе такого уравненія называется *исключеніемъ неизвѣстнаго.*

Для исключенія неизвѣстнаго есть четыре способа, а именно: 1) способъ уравненія коэффиціентовъ, или способъ сложенія и вычитанія уравненій, 2) способъ подстановки, 3) способъ сравненія величинъ неизвѣстныхъ и 4) способъ введенія неопредѣленныхъ множителей, или способъ Безу.

§ **121. Способъ уравненія коэффиціентовъ,** или **способъ сложенія и вычитанія уравненій.** Если коэффиціенты при одномъ изъ неизвѣстныхъ равны, то весьма легко исключить это неизвѣстное. Для этого надо сложить или вычесть данныя уравненія, смотря по тому, будутъ ли знаки разные или одинаковые у коэффиціентовъ этихъ неизвѣстныхъ. Возьмемъ два уравненія:

$$5x + 2y = 26 \text{ и } 3x - 2y = 6.$$

Сложивъ эти уравненія, получимъ:

$$+\begin{cases} 5x + 2y = 26, \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$
$$\overline{8x \qquad\quad = 32.}$$

Откуда $x = 4$. Чтобы опредѣлить теперь y, подставимъ въ первое уравненіе вмѣсто x найденную его величину. Получимъ:

$$5 \,.\, 4 + 2y = 26.$$

Изъ этого уравненія находимъ, что $y = 3$. Итакъ, корни данныхъ уравненій суть: $x = 4$, $y = 3$. Другихъ корней эти уравненія не имѣютъ.

Возьмемъ другую систему уравненій:

$$5x + 2y = 29 \text{ и } 5x - 3y = 19.$$

Такъ какъ знаки у коэффиціентовъ при x одинаковы, то для исключенія x вычтемъ второе уравненіе изъ перваго; получимъ:

$$-\begin{cases} 5x + 2y = 29, \\ -5x \mp 3y = -19 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad\qquad 5y = 10.}$$

Откуда $y = 2$, а $x = 5$.

До сихъ поръ мы брали такія уравненія, въ которыхъ коэффиціенты при исключаемомъ неизвѣстномъ были равные. Возь-

мемъ теперь такую систему, въ которой коэффиц. при исключаемомъ неизвѣстномъ были бы разные; напримѣръ:

$$9x + 8y = 60 \text{ и } 5x - 6y = 2.$$

Чтобы исключить изъ этихъ уравненій, положимъ, y, надо преобразовать ихъ такъ, чтобы коэффиціенты при y были равные. Для этого надо всѣ члены перваго уравненія помножить на 3, а второго — на 4; получимъ;

$$\begin{array}{l|l} 9x + 8y = 60 \text{ (на 3)}, & 27x + 24y = 180, \\ 5x - 6y = 2 \text{ (на 4)}. & 20x - 24y = 8. \end{array}$$

Поступая далѣе попредыдущему, найдемъ, что $x = 4$, а $y = 3$.

Числа: 3 и 4, на которыя мы умножали данныя уравненія, называются *дополнительными множителями*; они находятся такимъ же образомъ, какъ находятся дополнительные множители при приведеніи дробей къ общему знаменателю, т.-е., для коэффиціентовъ при исключаемомъ неизвѣстномъ находится наименьшее кратное, которое послѣдовательно дѣлится на эти коэф.; полученныя частныя и будутъ дополнительными множителями. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ наименьшее кратное для 8 и 6 будутъ 24; дополнительный множитель для перваго уравненія $= 24 : 8 = \mathbf{3}$, — для второго $= 24 : 6 = \mathbf{4}$.

На основаніи всего вышесказаннаго мы можемъ вывести слѣдующее **правило:** *Чтобы исключить одно неизвѣстное изъ двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными посредствомъ перваго способа, надо сначала уравнять коэффиціенты при исключаемомъ неизвѣстномъ, затѣмъ полученныя уравненія сложить или вычесть, смотря по тому, будутъ ли коэффиціенты имѣть знаки разные или одинаковые.*

Примѣчанія. I. При рѣшеніи уравненій съ двумя и вообще со многими неизвѣстными не достаточно выполнить всѣ упрощенія, указанныя въ § 114, но надо еще посмотрѣть, не имѣютъ ли всѣ члены уравненія общихъ дѣлителей и если таковые есть, то надо уравненіе сократить, и тогда только приступать къ исключенію одного неизвѣстнаго. Напр.:

$$1)\ \frac{x}{2} = \frac{8 + x}{14} + \frac{2y}{7} + \frac{1 - y}{2} \text{ и } 2)\ \frac{x + y}{8} = \frac{2}{5} + \frac{x - 3y}{40}.$$

Упрощенія:

$$7x = 8 + x + 4y + 7 - 7y;$$
$$7x - x - 4y + 7y = 8 + 7;$$
$$6x + 3y = 15.$$

$$5x + 5y = 16 + x - 3y;$$
$$5x + 5y - x + 3y = 16;$$
$$4x + 8y = 16.$$

Первое изъ полученныхъ уравненій можно сократить на 3, а второе на 4; получимъ:

$$2x + y = 5 \text{ и } x + 2y = 4.$$

II. Исключать всегда удобнѣе то неизвѣстное, у котораго коэффиціенты болѣе простые. Такъ, въ слѣдующихъ системахъ уравненій:

$$1) \begin{cases} 7x + 12y = 26, \\ x + 5y = 12. \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} 18x - 5y = 3, \\ 19x + 2y = 26, \end{cases}$$

удобнѣе исключить x въ первой системѣ и y во второй.

§ **122. Способъ подстановки.** Положимъ, что мы имѣемъ систему уравненій:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 27, \\ 2x - 5y = -14 \end{cases}$$

и желаемъ исключить x. Для этого опредѣлимъ изъ второго уравненія x, разсматривая y, какъ извѣстное; получимъ:

$$x = \frac{5y - 14}{2}.$$

Затѣмъ, подставимъ это выраженіе въ первое уравненіе вмѣсто x. Тогда получится у насъ одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ:

$$5\left(\frac{5y-14}{2}\right) + 3y = 27.$$

Рѣшивъ это послѣднее уравненіе, получимъ, что $y = 4$. Тогда $x = \frac{5y-14}{2} = \frac{20-14}{2} = 3.$

Отсюда мы можемъ вывести **правило:** *Чтобы исключить какое-либо неизвѣстное при помощи способа подстановки, надо сперва изъ одного уравненія опредѣлить какое-либо неизвѣстное*

относительно другого неизвѣстнаго и полученное выраженіе подставить въ другое уравненіе; тогда получится у насъ одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, которое остается рѣшить.

Примѣчаніе. Этотъ способъ неудобенъ въ томъ отношеніи, что вводитъ въ уравненіе дроби. Поэтому, прибѣгать къ нему выгодно лишь въ томъ случаѣ, когда коэф. при какомъ-либо изъ неизвѣстныхъ равенъ 1. Напримѣръ:

$$\begin{cases} 4x - y = 11, \\ 2x + 3y = 9. \end{cases}$$

Опредѣлимъ сначала изъ перваго уравненія, чему равенъ y; получимъ: $y = 4x - 11$. Подставимъ вмѣсто y это выраженіе во второе уравненіе, получимъ:

$$2x + 3(4x - 11) = 9.$$

Откуда $x = 3$; $y = 4x - 11 = 12 - 11 = 1$.

§ 123. **Способъ сравненія величинъ неизвѣстныхъ.** Пусть дана система уравненій:

$$\begin{cases} 5x - 4y = 12, \\ 3x + 2y = 16. \end{cases}$$

Чтобы исключить при помощи этого способа x, опредѣлимъ изъ обоихъ данныхъ уравненій это неизвѣстное относительно y; получимъ:

$$x = \frac{12 + 4y}{5} \text{ и } x = \frac{16 - 2y}{3}.$$

Такъ какъ въ обоихъ случаяхъ x долженъ обозначать одинаковыя числа, то выраженіе: $\frac{12+4y}{5}$ должно равняться выраженію: $\frac{16-2y}{3}$. Слѣдовательно, у насъ получилось уравненіе:

$$\frac{12+4y}{5} = \frac{16-2y}{3}.$$

Рѣшивъ его, получимъ, что $y = 2$. Тогда $x = \frac{12 + 4y}{5} = \frac{12 + 8}{5} = 4$.

Такимъ образомъ, *чтобы исключить одно изъ неизвѣстныхъ по способу сравненія, надо опредѣлить это неизвѣстное изъ обоихъ*

уравненій относительно другого неизвѣстнаго и полученныя выраженія соединить знакомъ равенства.

§ 124. Способъ введенія неопредѣленныхъ множителей. Возьмемъ два уравненія:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 29, \\ 8x - 9y = 13. \end{cases}$$

Умножимъ первое уравненіе на какое-либо неопредѣленное количество m и полученное уравненіе сложимъ со вторымъ изъ данныхъ уравненій; получимъ:

$$+\begin{cases} 4mx + 3my = 29m, \\ \quad 8x - \quad 9y = 13. \end{cases}$$

$$(4m + 8)x + (3m - 9)y = 29m + 13 \ldots (1).$$

Такъ какъ m есть количество неопредѣленное, то мы можемъ приписать ему такое значеніе, что коэффиціентъ при y обратится въ нуль, т.-е.:

$$3m - 9 = 0.$$

Откуда $m = 3$. Подставимъ теперь въ уравненіе (1) вмѣсто m его величину: 3. Тогда у насъ получится одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, а именно:

$$(4 \,.\, 3 + 8)x = 29 \,.\, 3 + 13.$$

Откуда $x = 5$. Другое неизвѣстное мы можемъ опредѣлить или по указанному прежде способу, т.-е., черезъ подстановку величины x въ какое-либо изъ данныхъ уравненій, или же изъ уравненія (1); для чего надо допустить, что коэффиц. при x обращается въ нуль, т.-е.:

$$4m + 8 = 0.$$

Откуда $m = -2$. Подставивъ вмѣсто m его величину: -2 въ уравненіе (1), получимъ:

$$[3 \,.\, (-2) - 9]y = 29 \,.\, (-2) + 13.$$

Откуда: $-15y = -45$; $y = (-45) : (-15) = 3$.

Отсюда мы можемъ вывести **правило:** *Чтобы исключить одно неизвѣстное изъ двухъ уравненій при помощи способа введенія неопредѣленныхъ множителей, надо одно уравненіе помножить на какое-либо неопредѣленное количество и полученное уравненіе сложить почленно съ другимъ даннымъ уравненіемъ. Въ полученномъ такимъ образомъ уравненіи одинъ коэффиціентъ надо при-*

равнять нулю; тогда у насъ получится одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ. Чтобы рѣшить послѣднее, надо сначала опредѣлить величину неопредѣленнаго множителя и подставить его въ послѣднее уравненіе вмѣсто m.

Примѣчаніе. Послѣдніе два способа исключенія не такъ удобны, какъ первые два, поэтому на практикѣ къ нимъ прибѣгаютъ очень рѣдко.

§ 125. Рѣшеніе системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными въ общемъ видѣ:

$$ax + by = c \dots (1),$$
$$a_1x + b_1y = c_1 \dots (2).$$

1-й способъ. Для опредѣленія x уравняемъ коэффиц. при y и вычтемъ второе уравненіе изъ перваго; получимъ:

$$-\begin{cases} ab_1x + bb_1y = cb_1, \\ -a_1bx \pm bb_1y = -c_1b \end{cases}$$
$$(ab_1 - a_1b)x = cb_1 - c_1b.$$

Откуда $x = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}$.

Для опредѣленія y уравняемъ коэффиц. при x и вычтемъ первое уравненіе изъ второго; получимъ:

$$-\begin{cases} aa_1x + ab_1y = ac_1, \\ -aa_1x \pm a_1by = -a_1c \end{cases}$$
$$(ab_1 - a_1b)y = ac_1 - a_1c.$$

Откуда $y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}$.

2-й способъ. Для опредѣленія y изъ перваго уравненія находимъ, что $x = \frac{c - by}{a}$. Подставимъ это выраженіе во второе уравненіе вмѣсто x, получимъ: $\frac{a_1(c - by)}{a} + b_1y = c_1$. Откуда $a_1c - a_1by + ab_1y = ac_1$ или $(ab_1 - a_1b)y = ac_1 - a_1c$. Слѣдовательно,

$$y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

Для опредѣленія x подставимъ въ уравненіе: $x = \frac{c - by}{a}$ вмѣсто y его величину; получимъ:

$$x = \frac{c}{a} - \frac{by}{a} = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\left(\frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}\right) = \frac{c}{a} - \frac{b(ac_1 - a_1c)}{a(ab_1 - a_1b)} =$$

$$= \frac{c(ab_1 - a_1b) - b(ac_1 - a_1c)}{a(ab_1 - a_1b)} =$$

$$= \frac{cab_1 - ca_1b - bac_1 + ba_1c}{a(ab_1 - a_1b)} = \frac{cab_1 - bac_1}{a(ab_1 - a_1b)} = \frac{a(cb_1 - c_1b)}{a(ab_1 - a_1b)} = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}.$$

3-й способъ. Для опредѣленія x изъ обоихъ уравненій имѣемъ: $y = \frac{c - ax}{b}$ и $y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}$. Откуда $\frac{c_1 - a_1x}{b_1} = \frac{c - ax}{b}$, или $c_1b - a_1bx = cb_1 - ab_1x$, или $(ab_1 - a_1b)x = cb_1 - c_1b$. Откуда $x = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}$.

4-й способъ. Умноживъ первое уравненіе на m и сложивъ его почленно со вторымъ, получимъ уравненіе:

$$(am + a_1)x + (bm + b_1)y = cm + c_1 \ldots (1).$$

Допустивъ, что $bm + b_1 = 0$, получимъ $m = -\frac{b_1}{b}$.

При этомъ послѣднемъ значеніи m уравненіе (1) обратится въ $(am + a_1)x = cm + c_1 \ldots (2)$, потому что коэффиц. при y равенъ нулю. Вставимъ теперь въ уравненіе (2) вмѣсто m его величину: $-\frac{b_1}{b}$; получимъ:

$$\left(-\frac{ab_1}{b} + a_1\right) x = -\frac{cb_1}{b} + c_1.$$

Откуда $(-ab_1 + a_1b)x = -cb_1 + c_1b$.

$$x = \frac{-cb_1 + c_1b}{-ab_1 + a_1b} = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}.$$

Допустивъ, что въ уравненіи (1) $am + a_1 = 0$, и поступая по предыдущему, мы найдемъ, что

$$y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

§ **126. Составленіе общихъ рѣшеній.** Итакъ, при рѣшеніи уравненій въ общемъ видѣ мы получили слѣдующіе корни:

$$x = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}, \qquad y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

Разсматривая эти формулы и сравнивая ихъ съ коэффиц. и извѣстными членами уравненій, мы легко можемъ вывести правило, какъ составляются общія рѣшенія, не рѣшая самихъ уравненій, а именно: *ихъ общій знаменатель:* $ab_1—a_1b$ *представляетъ разность произведеній, полученныхъ отъ перемноженія коэффиц. крестъ-на-крестъ.*

$$\frac{a}{a_1} \qquad \frac{b}{b_1}.$$

Числитель же для каждаго неизвѣстнаго получается изъ знаменателя замѣною коэффиціента неизвѣстнаго соотвѣтственно извѣстными членами: c *и* c_1. Такъ, чтобы получить числителя для x, надо въ знаменателѣ: $ab_1—a_1b$ вмѣсто a и a_1 поставить c и c_1; получимъ $cb_1—c_1b$. Чтобы получить числителя для y, надо въ знаменателѣ: $ab_1—a_1b$ вмѣсто b_1 и b поставить c_1 и c; получимъ: $ac_1—a_1c$.

§ **127.** Формулы общихъ рѣшеній даютъ намъ возможность, не рѣшая уравненій, находить корни для неизвѣстныхъ.

Положимъ, что требуется рѣшить уравненія: $5x+4y=$ $=41$ и $4x-3y=8$. Тогда $a=5$, $b=4$, $c=41$; $a_1=4$, $b_1=$ $=-3$ и $c_1=8$.

$$x=\frac{cb_1-c_1b}{ab_1-a_1b}=\frac{41\,.\,(-3)-8\,.\,4}{5\,.\,(-3)-4\,.\,4}=\frac{-123-32}{-15-16}=\frac{-155}{-31}=5.$$

$$y=\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}=\frac{5\,.\,8-4\,.\,41}{-31}=\frac{-124}{-31}=4.$$

Возьмемъ еще примѣръ:

$$\begin{cases}(2m+n)x-(2m-n)y=8mn,\\(2m-n)x+(2m+n)y=8m^2-2n^2.\end{cases}$$

Здѣсь $a=2m+n$; $b=-(2m-n)=n-2m$; $c=8mn$;
$a_1=2m-n$; $b_1=2m+n$; $c_1=8m^2-2n^2$.

$$\text{Тогда, } x=\frac{cb_1-c_1b}{ab_1-a_1b}=\frac{8mn(2m+n)-(8m^2-2n^2)\ (n-2m)}{(2m+n)^2-(2m-n)\ (n-2m)}=$$

$$=\frac{(16m^2n+8mn^2)-(8m^2n-16m^3-2n^3+4mn^2)}{(4m^2+4mn+n^2)-(4mn-n^2-4m^2)}=$$

$$=\frac{8m^2n+4mn^2+16m^3+2n^3}{8m^2+2n^2}=\frac{2(2m+n)\,(4m^2+n^2)}{2(4m^2+n^2)}=2m+n.$$

$$y=\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}=\frac{(2m+n)\ (8m^2-2n^2)-(2m-n)\,8mn}{2(4m^2+n^2)}=$$

$$=\frac{(16m^3+8m^2n-4mn^2-2n^3)-(16m^2n-8mn^2)}{2(4m^2+n^2)}=$$

$$=\frac{16m^3-8m^2n+4mn^2-2n^3}{2(4m^2+n^2)}=\frac{2(2m-n)\ (4m^2+n^2)}{2(4m^2+n^2)}=2m-n.$$

§ 128. **Рѣшеніе уравненій со многими неизвѣстными.** Мы уже видѣли, что одно уравненіе съ двумя неизвѣстными имѣетъ безчисленное множество корней, почему и называется неопредѣленнымъ. Точно также система уравненій съ тремя, четырьмя и, вообще, со многими неизвѣстными имѣетъ безчисленное множество корней, если число уравненій меньше числа неизвѣстныхъ, и потому называется неопредѣленной. Такъ, одно или два уравненія съ тремя неизвѣстными суть уравненія неопредѣленныя; одно, два или три уравненія съ четырьмя неизвѣстными тоже неопредѣленныя и т. п.

Если же число уравненій въ данной системѣ равно числу неизвѣстныхъ, то такая система, вообще говоря, имѣетъ по одному опредѣленному корню для каждаго неизвѣстнаго.

Рѣшеніе системы уравненій со многими неизвѣстными состоитъ въ томъ, что постепенно изъ данныхъ уравненій исключаютъ одно, другое и т. д. неизвѣстныя до тѣхъ поръ, пока не получится одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, изъ котораго и опредѣляютъ послѣднее; затѣмъ легко найти остальныя неизвѣстныя.

Исключеніе неизвѣстныхъ производится при помощи тѣхъ же способовъ, какіе употребляются при рѣшеніи системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

Покажемъ на примѣрѣ, какъ рѣшается система трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными. Пусть намъ дана система уравненій:

$$3x+2y-4z=-4.$$
$$2x-5y+3z=1.$$
$$4x+2y-\ z=10.$$

§ 129. **Способъ уравненія коэффиціентовъ.** Исключимъ сначала изъ перваго и второго, а потомъ изъ второго и третьяго уравненій x. Для этого мы должны уравнять коэф. при x и вычесть полученныя уравненія.

$$\begin{array}{ll} 1)\ 3x + 2y - 4z = -4 \text{ (на 2)}, & \\ 2)\ 2x - 5y + 3z = 1 \quad \text{(на 3)}. & \end{array} - \left\{ \begin{array}{r} 6x + 4y - 8z = -8, \\ -6x \mp 15y \pm 9z = -3 \\ \hline ,, \quad 19y - 17z = -11. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ll} 2)\ 2x - 5y + 3z = 1 \text{ (на 2)}, & \\ 3)\ 4x + 2y - z = 10. & \end{array} - \left\{ \begin{array}{r} 4x - 10y + 6z = 2, \\ -4x \pm 2y \mp z = -10 \\ \hline ,, \ -12y + 7z = -8. \end{array} \right.$$

Такимъ образомъ у насъ получилось два уравненія съ двумя неизвѣстными, которыя мы рѣшимъ тоже при помощи уравненія коэффиціентовъ.

$$\begin{array}{r} 19y - 17z = -11 \text{ (на } 7), \\ -12y + 7z = -8 \text{ (на } 17), \end{array} + \left\{ \begin{array}{r} 133y - 119z = -77, \\ -204y + 119z = -136 \\ \hline -71y \quad ,, \quad = -213. \end{array} \right.$$

Откуда $y = 3$. Чтобы опредѣлить z, подставимъ въ уравненіе: $-12y + 7z = -8$, вмѣсто y его величину; получимъ: $-36 + 7z = -8$. Откуда $z = 4$.

Наконецъ, чтобы найти x, подставимъ въ одно изъ данныхъ уравненій, положимъ, въ первое, вмѣсто y и z ихъ величины; получимъ: $3x + 6 - 16 = -4$. Откуда $x = 2$.

§ **130. Способъ подстановки.** Чтобы исключить изъ данныхъ уравненій x, опредѣлимъ сначала это неизвѣстное изъ перваго уравненія относительно двухъ другихъ неизвѣстныхъ: y и z; получимъ:

$$x = \frac{-4 - 2y + 4z}{3}.$$

Затѣмъ подставимъ это выраженіе вмѣсто x въ два послѣднія уравненія; получимъ два уравненія съ двумя неизвѣстными:

1) $\dfrac{2(-4 - 2y + 4z)}{3} - 5y + 3z = 1$ или: $-19y + 17z = 11$.

2) $\dfrac{4(-4 - 2y + 4z)}{3} + 2y - z = 10$,, $-2y + 13z = 46$.

Рѣшивъ ихъ, получимъ, что $y = 3$, а $z = 4$.

Примѣчаніе. Замѣтимъ, что при исключеніи неизвѣстнаго этимъ способомъ надо всегда выбирать такое неизвѣстное, у котораго коэффиціентъ наименьшій. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ гораздо удобнѣе было бы исключить z, опредѣливъ его относительно первыхъ двухъ неизвѣстныхъ изъ третьяго уравненія.

§ **131. Способъ сравненія величинъ неизвѣстныхъ.** Чтобы исключить при помощи этого способа, положимъ, z, опредѣлимъ это неизвѣстное относительно другихъ въ каждомъ изъ данныхъ уравненій; получимъ:

$$z = \frac{3x + 2y + 4}{4};\quad z = \frac{-2x + 5y + 1}{3};\quad z = 4x + 2y - 10.$$

Откуда имѣемъ два уравненія съ двумя неизвѣстными:

$$1)\ \frac{3x + 2y + 4}{4} = \frac{-2x + 5y + 1}{3}.\quad 2)\ \frac{3x + 2y + 4}{4} = 4x + 2y - 10.$$

Рѣшивъ ихъ, получимъ, что $x = 2$, а $y = 3$.

§ **132. Способъ введенія неопредѣленныхъ множителей.** Чтобы рѣшить данную систему уравненій при помощи этого способа, умножимъ всѣ члены перваго уравненія на произвольное количество m, а второе на n, и полученныя уравненія почленно сложимъ съ третьимъ, получимъ:

$$+\begin{cases} 3mx + 2my - 4mz = -4m, \\ 2nx - 5ny + 3nz = n, \\ 4x + 2y - z = 10 \end{cases}$$

$$(3m + 2n + 4)x + (2m - 5n + 2)y + (-4m + 3n - 1)z = \\ = -4m + n + 10 \dots (1).$$

Теперь, желая опредѣлить x, выберемъ для m и n такія значенія, чтобы коэффиціенты при y и z въ уравненіи (1) обратились въ нуль, т.-е.:

$$2m - 5n + 2 = 0.$$
$$-4m + 3n - 1 = 0.$$

Рѣшивъ эти два послѣднихъ уравненія, найдемъ что $m = \frac{1}{14}$, а $n = \frac{3}{7}$. Подставивъ теперь въ уравненіе (1) вмѣсто m и n ихъ величины, получимъ $(3 \cdot \frac{1}{14} + 2 \cdot \frac{3}{7} + 4)x = -4 \cdot \frac{1}{14} + \frac{3}{7} + 10.$

Откуда $x = 2$.

Чтобы опредѣлить y, допустимъ, что:

$$3m + 2n + 4 = 0.$$
$$-4m + 3n - 1 = 0.$$

Изъ этихъ послѣднихъ уравненій имѣемъ, что $m = -\frac{14}{17}$, $n = -\frac{13}{17}$. Подставивъ въ уравненіе (1) вмѣсто m и n ихъ величины, получимъ уравненіе:

$$\left(2 \cdot \frac{-14}{17} - \frac{5 \cdot -13}{17} + 2\right) y = -4 \cdot \frac{-14}{17} + \frac{-13}{17} + 10.$$

Откуда $y = 3$.

Наконецъ, чтобы опредѣлить z, допустимъ, что:

$$3m + 2n + 4 = 0.$$
$$2m - 5n + 2 = 0.$$

Изъ этихъ уравненій имѣемъ, что $m = -\frac{24}{19}$, $n = -\frac{2}{19}$. Подставивъ въ уравненіе (1) вмѣсто m и n ихъ величины, получимъ уравненіе:

$$\left(-4 \cdot \frac{-24}{19} + 3 \cdot \frac{-2}{19} - 1\right) z = -4 \cdot \frac{-24}{19} + \frac{-2}{19} + 10.$$

Откуда $z = 4$.

§ **133**. Такимъ же образомъ рѣшается система 4-хъ уравненій съ четырьмя неизвѣстными, пяти уравненій съ пятью неизвѣстными и т. д.

Вообще, если намъ дана система n уравненій съ n неизвѣстными, то сначала исключаютъ изъ всѣхъ уравненій одно неизвѣстное. Тогда получится система $n-1$ уравненій съ $n-1$ неизвѣстными. Въ этой системѣ исключаютъ снова одно неизвѣстное, и получается новая система, въ которой число уравненій и неизвѣстныхъ уменьшится еще на единицу. Такимъ образомъ поступаютъ до тѣхъ поръ, пока не получится одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ.

§ **134**. Рѣшимъ систему пяти уравненій съ пятью неизвѣстными:

$$\begin{cases} x + 3y - z + t + 4u = 28. \\ x - 3y + 2z - 2t + u = -2. \\ x - 2y + 3z - 2t + u = 3. \\ x + 2y + 3z - 2t - u = 1. \\ 2x - y - z - t + u = -2. \end{cases}$$

Исключимъ сначала x при помощи способа подстановки. Для этого опредѣлимъ это неизвѣстное изъ перваго уравненія относительно остальныхъ неизвѣстныхъ; получимъ:

$$x = 28 - 3y + z - t - 4u.$$

Теперь подставимъ въ остальныя уравненія вмѣсто x его величину; получимъ:

$28-3y+z-t-4u-3y+2z-2t+u=-2$ или $-2y+z-t-u=-10$.
$28-3y+z-t-4u-2y+3z-2t+u=3$ „ $-5y+4z-3t-3u=-25$.
$28-3y+z-t-4u+2y+3z-2t-u=1$ „ $-y+4z-3t-5u=-27$.
$2(28-3y+z-t-4u)-y-z-t+u=-2$ „ $-7y+z-3t-7u=-58$.

Въ этой системѣ также при помощи способа подстановки исключимъ y, опредѣливъ его относительно другихъ неизвѣстныхъ изъ 3-го уравненія; получимъ:

$$y = 27 + 4z - 3t - 5u; \text{ откуда:}$$

$-2(27+4z-3t-5u)+z-t-u=-10$ или $-7z+5t+9u=44$.
$-5(27+4z-3t-5u)+4z-3t-3u=-25$ „ $-8z+6t+11u=55$.
$-7(27+4z-3t-5u)+z-3t-7u=-58$ „ $-27z+18t+28u=131$.

Такимъ образомъ у насъ получилась система трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными. Исключимъ изъ нея t при помощи способа уравненія коэффиціентовъ:

$$\begin{matrix} -7z+5t+9u=44 \text{ (на 6)}, \\ -8z+6t+11u=55 \text{ (на 5)} \end{matrix} \quad - \quad \begin{cases} -42z+30t+54u=264, \\ \mp 40z \pm 30t \pm 55u = -275 \\ \hline -2z \qquad\qquad -u=-11. \end{cases}$$

$$\begin{matrix} -8z+6t+11u=55 \text{ (на 3)}, \\ -27z+18t+28u=131 \end{matrix} \quad - \quad \begin{cases} -24z+18t+33u=165, \\ \mp 27z \pm 18t \pm 28u = -131 \\ \hline 3z \qquad\qquad +5u=34. \end{cases}$$

Рѣшивъ, наконецъ, два уравненія съ двумя неизвѣстными: $-2z-u=-11$ и $3z+5u=34$, получимъ, что $z=3$, а $u=5$. — Чтобы опредѣлить t, подставимъ въ первое уравненіе 3-й системы вмѣсто z и u ихъ величины; получимъ: $-21+5t+45=44$. Откуда $t=4$.

Чтобы опредѣлить y, подставимъ въ первое уравненіе второй системы вмѣсто z, t и u ихъ величины; получимъ: $-2y+3-4-5=-10$. Откуда $y=2$. — Наконецъ, чтобы опредѣлить x, подставимъ въ первое уравненіе первой системы вмѣсто y, z, t и u ихъ величины; получимъ: $x+6-3+4+20=28$. Откуда $x=1$.

§ **135. Частные случаи.** Изъ предыдущаго примѣра мы видимъ, что рѣшеніе системы уравненій со многими неизвѣстными бываетъ довольно продолжительно. Поэтому, на практикѣ

нужно пользоваться всѣми сокращеніями, какія только допускаютъ данныя уравненія. Иногда даже весьма полезно отступить объ общихъ способовъ рѣшенія и употребить какой-либо частный пріемъ, приводящій скорѣе къ нахожденію неизвѣстныхъ. Покажемъ на примѣрахъ главнѣйшіе случаи.

I случай, *когда въ системѣ есть неполныя уравненія.* Неполными уравненіями называются такія, въ которыя не входятъ всѣ неизвѣстныя данной системы. Напримѣръ:

$$1)\begin{cases} 3x + 2y = 12. \\ y + 2z = 5. \\ 2z - 3t = -13. \\ 2x - 3y + 2t = 5. \end{cases}$$

Чтобы рѣшить эту систему, сначала замѣтимъ, что x входитъ только въ первое и послѣднее уравненія. Поэтому, исключимъ его изъ этихъ уравненій при помощи уравненія коэффиціентовъ, получимъ систему трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными:

$$\begin{cases} 13y - 6t = 9. \\ y + 2z = 5. \\ 2z - 3t = -13. \end{cases}$$

Въ этой системѣ изъ второго и третьяго уравненія легко исключить z. Получимъ новую систему: $13y - 6t = 9$ и $y + 3t = 18$. Откуда $y = 3$; $t = 5$; $z = 1$; $x = 2$.

$$2)\begin{cases} x + 2y = 5. \\ y + 2z = 8. \\ z + 2t = 11. \\ t + 2u = 14. \\ x + y + z + t + u = 15. \end{cases}$$

Чтобы рѣшить эту систему, опредѣлимъ изъ четвертаго уравненія t; получимъ: $t = 14 - 2u$ . . . (1). Подставимъ это выраженіе вмѣсто t въ третье уравненіе; имѣемъ:

$z + 2(14 - 2u) = 11$. Откуда $z = 4u - 17$ . . . (2) Далѣе, подставимъ во второе уравненіе вмѣсто z его величину; получимъ: $y + 2(4u - 17) = 8$. Откуда $y = 42 - 8u$ . . . (3). Наконецъ, подставимъ въ первое уравненіе вмѣсто y его величину относительно u; получимъ: $x + 2(42 - 8u) = 5$. Откуда $x = 16u - 79$ . . . (4). Такимъ образомъ x, y, z и t выражены черезъ u. Вставивъ эти выраженія въ пятое уравненіе данной системы, получимъ:

$(16u - 79) + (42 - 8u) + (4u - 17) + (14 - 2u) + u = 15$. Откуда $11u = 55$, или $u = 5$; $t = 14 - 2u = 4$; $z = 3$; $y = 2$; $x = 1$.

II случай. Рѣшеніе уравненій вида: $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{y} \ldots = m.$

1) $\begin{cases} \frac{4}{x}-\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=3. \\ \frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{5}{z}=7\frac{1}{2}. \\ \frac{1}{x}-\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=-3\frac{1}{6}. \end{cases}$ Допустивъ, что: $\begin{cases} \frac{1}{x}=a, \\ \frac{1}{y}=b, \\ \frac{1}{z}=c, \end{cases}$

получимъ три уравненія съ тремя неизвѣстными:

$\begin{cases} 4a-3b+2c=3, \\ 3a+3b+5c=7\frac{1}{2}, \\ a-2b-3c=-3\frac{1}{6}. \end{cases}$ Рѣшивъ эту систему, найдемъ, что $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$ и $c=1$. Слѣдовательно, $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{z}=1$.

Откуда $x=2$, $y=3$, $z=1$.

2) $\begin{cases} \frac{20}{x+y}-\frac{3}{x-y}=1. \\ \frac{15}{x-y}+\frac{5}{x+y}=16. \end{cases}$ Допустивъ, что $\frac{1}{x+y}=a$ и $\frac{1}{x-y}=b$, получимъ уравненія:

$20a-3b=1$ и $15b+5a=16$. Откуда $a=\frac{1}{5}$ и $b=1$.

Слѣдовательно, $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{x-y}=1$. Освободивъ послѣднія уравненія отъ знаменателя, получимъ: $x+y=5$ и $x-y=1$.

Откуда $x=3$ и $y=2$.

III случай. Сложеніе и вычитаніе уравненій.

1) $\begin{cases} x+y=6. \\ x+z=8. \\ y+z=10. \end{cases}$ Сложивъ всѣ уравненія, получимъ: $2(x+y+z)=24$; откуда $x+y+z=$ $=12 \ldots (1)$. Вычтя изъ уравненія (1) каждое изъ данныхъ уравненій, получимъ: $z=6$, $y=4$, $x=2$.

2) $\begin{cases} x+y+z=9. \\ x+y-z=1. \\ x-y+z=3. \end{cases}$ Вычтя изъ перваго уравненія второе и третье, получимъ $2z=8$ и $2y=6$. Откуда $z=4$, $y=3$, $x=2$.

3) $\begin{cases} x+2y+3z+4t=20. \\ y+2z+3t+4x=26. \\ z+2t+3x+4y=28. \\ t+2x+3y+4z=26. \end{cases}$ Сложивъ эти уравненія, получимъ: $10x+10y+10z+10t=100$ или $x+y+z+t=10\ldots(1)$. Далѣе, вычтемъ второе данное уравненіе изъ перваго, третье изъ второго, четвертое изъ третьяго; получимъ:

$$y+z+t-3x=-6\ldots(2).$$
$$z+t+x-3y=-2\ldots(3).$$
$$t+x+y-3z=2\ldots(4).$$

Наконецъ, уравненія: (2), (3) и (4) вычтемъ послѣдовательно изъ уравненія (1); получимъ: $4x=16$, $4y=12$ и $4z=8$. Откуда $x=4$, $y=3$, $z=2$.

$$4)\ \begin{cases} yz+xz-xy=\frac{xyz}{24}. \\ yz+xy-xz=\frac{5}{24}xyz. \\ xz+xy-yz=\frac{7}{24}xyz. \end{cases}$$

Раздѣливъ данныя уравненія на xyz, получимъ:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{24}.$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\frac{5}{24}.$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{7}{24}.$$

Сложивъ почленно въ этой системѣ первое уравненіе со вторымъ и третьимъ, а также второе съ третьимъ, получимъ:

$\frac{2}{x}=\frac{6}{24}$; $\frac{2}{y}=\frac{8}{24}$; $\frac{2}{z}=\frac{12}{24}$. Откуда $x=8$, $y=6$, $z=4$.

§ **136. Неопредѣленныя, несовмѣстныя и условныя уравненія.** I. Мы уже видѣли, что система уравненій, въ которой число неизвѣстныхъ больше числа уравненій, имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, почему и называется неопредѣленной. Какъ рѣшаются такія системы, будетъ указано ниже (см. неопредѣленныя уравненія, глава VIII).

II. Если же въ системѣ уравненій число неизвѣстныхъ равно числу уравненій, то такая система, вообще говоря, допускаетъ только одно опредѣленное рѣшеніе для каждаго неизвѣстнаго.

Въ частности же иногда такія системы могутъ имѣть безчисленное множество рѣшеній, почему и называются неопредѣленными; или же могутъ не имѣть ни одного рѣшенія вслѣдствіе несовмѣстности уравненій. Послѣднія системы называются *невозможными*.

Система, въ которой число неизвѣстныхъ равно числу уравненій, бываетъ неопредѣленной тогда, когда одно изъ уравненій является *слѣдствіемъ* другихъ. Напримѣръ:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 12. \\ 5x + y - z = 8. \\ 22x + 3y - z = 44. \end{cases}$$

Въ этой системѣ третье уравненіе является слѣдствіемъ двухъ первыхъ, а именно: оно получается, если мы второе уравненіе умножимъ на 4 и полученное уравненіе сложимъ съ первымъ. Поэтому, всякія величины, удовлетворяющія двумъ первымъ уравненіямъ, будутъ удовлетворять и третьему. Неопредѣленность уравненій обнаруживается тѣмъ, что при рѣшеніи мы получимъ равенство: $0=0$.

Въ самомъ дѣлѣ, рѣшимъ нашу систему. Сложивъ первое и второе уравненія, получимъ $7x + 2z = 20$ . . . (1). Уравнявъ коэф. при y въ первомъ и третьемъ уравненіяхъ и сложивъ ихъ, получимъ $28x + 8z = 80$ . . . (2). Наконецъ, уравнявъ коэффиц. въ уравненіяхъ (1) и (2) и вычтя одно изъ другого, получимъ: $0=0$.

2. Возьмемъ примѣръ невозможной системы:

$$\begin{cases} 3 + 2y = 15. \\ 6 + 4y = 20. \end{cases}$$

Въ этой системѣ второе уравненіе противорѣчитъ первому, потому что въ немъ первая часть въ два раза больше той же части перваго уравненія; вторая же часть хотя и больше, но не въ два раза. При рѣшеніи несовмѣстность уравненій обнаруживается тѣмъ, что получается невозможное равенство. Такъ, рѣшая нашу систему, мы получимъ равенство: $0 = 10$.

III. Наконецъ, въ системѣ уравненій можетъ быть число уравненій больше числа неизвѣстныхъ. Чтобы рѣшить подобную систему, надо взять столько уравненій, сколько есть неизвѣстныхъ, и изъ этой системы опредѣлить величины неизвѣстныхъ. Полученныя величины должны удовлетворять и остальнымъ уравненіямъ. Въ противномъ случаѣ данныя уравненія несовмѣстны, и самая система невозможна. Напр.:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12. \\ 3x - y = 3. \\ 2x + y = 11. \end{cases}$$

Рѣшивъ систему двухъ первыхъ уравненій, найдемъ, что $x = 2$ и $y = 3$. Вставивъ величину x и y въ послѣднее уравненіе, получимъ невозможное равенство: $7 = 11$; слѣдовательно, данная система невозможна.

Но если въ подобной системѣ нѣкоторые коэффиціенты или извѣстные члены выражены буквами, то можно опредѣлить,

какое значеніе должны имѣть эти буквы, чтобы система уравненій была возможной. Для этого надо въ лишнія уравненія подставить вмѣсто неизвѣстныхъ ихъ величины и затѣмъ опредѣлить, чему должны равняться буквенные коэф. или буквенные извѣстные члены.

Такъ, если бы коэффиціентомъ при x въ послѣднемъ изъ данныхъ уравненій было a, то, опредѣливъ изъ первыхъ двухъ уравненій x и y и подставивъ ихъ величины въ третье уравненіе, получили бы уравненіе: $a.2+3=11$ ... (1). Откуда $a=4$. Точно такъ же если бы извѣстный членъ равнялся n, то получили бы уравненіе: $2.2+3=n$ ... (2); откуда $n=7$.

Уравненія: (1) или (2), показывающія, при какомъ условіи система, имѣющая число уравненій больше числа неизвѣстныхъ, возможна, — называются *условными*.

Задачи:

1516. $\begin{cases} x+y=347. \\ x-y=153. \end{cases}$

1517. $\begin{cases} x+5y=573. \\ x+y=181. \end{cases}$

1518. $\begin{cases} 3x+y=73. \\ 2x-y=32. \end{cases}$

1519. $\begin{cases} 4x+3y=97. \\ 7x+3y=127. \end{cases}$

1520. $\begin{cases} 5x+7y=176. \\ 5x-3y=46. \end{cases}$

1521. $\begin{cases} 2x-3y=100. \\ 2x+y=156. \end{cases}$

1522. $\begin{cases} x+4y=37. \\ 2x+5y=53. \end{cases}$

1523. $\begin{cases} 7x+3y=100. \\ 3x-y=20. \end{cases}$

1524. $\begin{cases} 2x+5y=1. \\ 6x+7y=3. \end{cases}$

1525. $\begin{cases} 8x-15y=-30. \\ 2x+3y=15. \end{cases}$

1526. $\begin{cases} 5x+6y=529. \\ 3x+2y=431. \end{cases}$

1527. $\begin{cases} 24x+7y=27. \\ 8x-33y=115. \end{cases}$

1528. $\begin{cases} 3x+4y=253. \\ y=5x. \end{cases}$

1529. $\begin{cases} 2x-11y=-95. \\ x-3y=0. \end{cases}$

1530. $\begin{cases} 5x-4y=6. \\ 8x=7y. \end{cases}$

1531. $\begin{cases} 7x-3y=27. \\ 5x-6y=0. \end{cases}$

1532. $\begin{cases} 2x+3y=41. \\ 3x+2y=39. \end{cases}$

1533. $\begin{cases} 5x+7y=17. \\ 7x-5y=9. \end{cases}$

1534. $\begin{cases} 11x+12y=100. \\ 9x+8y=80. \end{cases}$

1535. $\begin{cases} 18x-35y=-13. \\ 15x+28y=275. \end{cases}$

1536. $\begin{cases} 3x+7y=7. \\ 5x+3y=-36. \end{cases}$

1537. $\begin{cases} 3x+16y=5. \\ 28y-5x=19. \end{cases}$

1538. $\begin{cases} 5x+3y+2=0. \\ 2x+2y+1=0. \end{cases}$

1539. $\begin{cases} 21x+8y+66=0. \\ 23y-28x+13=0. \end{cases}$

1540. $\begin{cases} 10x + 7y + 4 = 0. \\ 6x + 5y + 2 = 0. \end{cases}$

1541. $\begin{cases} x = 3y - 19. \\ y = 3x - 23. \end{cases}$

1542. $\begin{cases} 23x + 15y = 4\frac{1}{4}. \\ 48x + 45y = 18. \end{cases}$

1543. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 6. \\ 3x - 4y = 4. \end{cases}$

1544. $\begin{cases} \frac{3}{4}x - 2y = 1. \\ \frac{1}{3}x - y = 0. \end{cases}$

1545. $\begin{cases} 2x - \frac{5}{3}y = 4. \\ 3x - \frac{7}{2}y = 0. \end{cases}$

1546. $\begin{cases} \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y + 1. \\ \frac{1}{4}x = \frac{4}{3}y - 10. \end{cases}$

1547. $\begin{cases} \frac{1}{3}y = \frac{1}{2}x - 1. \\ \frac{1}{4}y = \frac{2}{5}x - 1. \end{cases}$

1548. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}. \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}. \end{cases}$

1549. $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3. \\ \frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4. \end{cases}$

1550. $\begin{cases} \frac{1,6}{x} - \frac{2,7}{y} = -1. \\ \frac{0,8}{x} + \frac{3,6}{y} = 5. \end{cases}$

1551. $\begin{cases} 17x - \frac{0,3}{y} = 3. \\ 16x - \frac{0,4}{y} = 2. \end{cases}$

1552. $\begin{cases} \frac{5}{x + 2y} = \frac{7}{2x + y}. \\ \frac{7}{3x - 2y} = \frac{5}{6 - y}. \end{cases}$

1553. $\begin{cases} \frac{1}{3x + 1} = \frac{2}{5y + 4}. \\ \frac{1}{4x - 3} = \frac{2}{7y - 6}. \end{cases}$

1554. $\begin{cases} \frac{x + 3y}{x - y} = 8. \\ \frac{7x - 13}{3y - 5} = 4. \end{cases}$

1555. $\begin{cases} \frac{15x + 1}{45 - y} = 8. \\ \frac{12y + 19}{x - 10} = 25. \end{cases}$

1556. $\begin{cases} \frac{3x + 1}{4 - 2y} = \frac{4}{3}. \\ x + y = 1. \end{cases}$

1557. $\begin{cases} \frac{7 - 2x}{5 - 3y} = \frac{3}{2}. \\ y - x = 4. \end{cases}$

1558. $\begin{cases} \frac{x - 3}{y + 2} = \frac{2}{3}. \\ \frac{x + 1}{y - 2} = \frac{3}{2}. \end{cases}$

1559. $\begin{cases} \frac{8x + 1}{1,5 - y} = 11. \\ \frac{7y + 0,3}{2x - 0,3} = 6. \end{cases}$

1560. $\begin{cases} \frac{x + 2y + 1}{2x - y + 1} = 2. \\ \frac{3x - y + 1}{x - y + 3} = 5. \end{cases}$

1561. $\begin{cases} \frac{x + 3y + 13}{4x + 5y - 25} = 3. \\ \frac{8x + y + 6}{5x + 3y - 23} = 5. \end{cases}$

1562. $\begin{cases} \dfrac{3x+2y+12,3}{4x+3y-44}=3. \\ \dfrac{4x+10y-6,7}{3x+y-10}=4. \end{cases}$

1563. $\begin{cases} \dfrac{0,9x-0,7y+7,3}{13x-15y+17}=0,2. \\ \dfrac{1,2x-0,2y+8,9}{13x-15y+17}=0,3. \end{cases}$

1564. $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{3}+\dfrac{5x-3y}{3}=x+1. \\ \dfrac{2x-3y}{3}+\dfrac{3x-y}{3}=y+1. \end{cases}$

1565. $\begin{cases} \dfrac{2x-y+3}{3}-\dfrac{x-2y+3}{4}=4. \\ \dfrac{3x-4y+3}{4}-\dfrac{4x-2y-9}{3}=4. \end{cases}$

1566. $\begin{cases} x+y=a. \\ x-y=b. \end{cases}$

1567. $\begin{cases} x+y=\frac{1}{2}(5a+5b). \\ x-y=\frac{1}{2}(a+b). \end{cases}$

1568. $\begin{cases} 2x-3y=5b-a. \\ 3x-2y=a+5b. \end{cases}$

1569. $\begin{cases} 2x-3y=-5a. \\ 3x-2y=-5b. \end{cases}$

1570. $\begin{cases} 5x+3y=4a+b. \\ 3x+5y=4a-b. \end{cases}$

1571. $\begin{cases} 7x-5y=24a. \\ 5x-7y=24b. \end{cases}$

1572. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y}=a. \\ \dfrac{y+1}{x}=b. \end{cases}$

1573. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{a}{b}. \\ \dfrac{x+1}{y+1}=\dfrac{c}{d}. \end{cases}$

1574. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+1}=\dfrac{a+b+c}{a-b+c}. \\ \dfrac{x-1}{y-1}=\dfrac{a+b-c}{a-b-c}. \end{cases}$

1575. $\begin{cases} \dfrac{x-y+1}{x-y-1}=a. \\ \dfrac{x+y+1}{x+y-1}=b. \end{cases}$

1576. $\begin{cases} \dfrac{x+y+1}{x-y+1}=\dfrac{a+1}{a-1}. \\ \dfrac{x+y+1}{x-y-1}=\dfrac{1+b}{1-b}. \end{cases}$

1577. $\begin{cases} \dfrac{x-y+1}{x+y-1}=a. \\ \dfrac{x+y+1}{x-y-1}=b. \end{cases}$

1578. $\begin{cases} \dfrac{x-c}{y-c}=\dfrac{a}{b}. \\ x-y=a-b. \end{cases}$

1579. $\begin{cases} \dfrac{x-a+c}{y-a+b}=\dfrac{b}{c}. \\ \dfrac{x+c}{y+b}=\dfrac{a+b}{a+c}. \end{cases}$

1580. $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=a+b. \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2a. \end{cases}$

1581. $\begin{cases} \dfrac{x}{a-b}-\dfrac{y}{a-c}=b-c. \\ \dfrac{a^2-x}{b}+\dfrac{a^2-y}{c}=b+c. \end{cases}$

1582. $\begin{cases} x + y = 37. \\ x + z = 25. \\ y + z = 22. \end{cases}$

1583. $\begin{cases} y + z = a. \\ z + x = b. \\ x + y = c. \end{cases}$

1584. $\begin{cases} 2x + 3y = 12. \\ 3x + 2z = 11. \\ 3y + 4z = 10. \end{cases}$

1585. $\begin{cases} 2x + 2y = 7. \\ 7x + 9z = 29. \\ y + 8z = 17. \end{cases}$

1586. $\begin{cases} 5x + 3y = 13. \\ 7x - 3z = 8. \\ 3y + 5z = 11. \end{cases}$

1587. $\begin{cases} 1{,}3x - 1{,}9y = 1. \\ 1{,}7y - 1{,}1z = 2. \\ 2{,}9z - 2{,}1x = 3. \end{cases}$

1588. $\begin{cases} x + y + z = 100. \\ 3x - 2z = 4. \\ 5y = 4z. \end{cases}$

1589. $\begin{cases} x + y + z = 36. \\ 4x = 3y. \\ 2x = 3z. \end{cases}$

1590. $\begin{cases} 5x + 3y + 2z = 217. \\ 5x - 3y = 39. \\ 3y - 2z = 20. \end{cases}$

1591. $\begin{cases} x + y + z = 100. \\ y = 0{,}7x - 4. \\ z = 0{,}3x + 4. \end{cases}$

1592. $\begin{cases} x + y - z = 17. \\ x + z - y = 13. \\ y + z - x = 7. \end{cases}$

1593. $\begin{cases} y + z - x = a. \\ z + x - y = b. \\ x + y - z = c. \end{cases}$

1594. $\begin{cases} x + y + z = 99. \\ x : y : z = 5 : 3 : 1. \end{cases}$

1595. $\begin{cases} x + y + z = m. \\ x : y : z = a : b : c. \end{cases}$

1596. $\begin{cases} x + y + z = 26. \\ x : z = 11 : 7. \\ y : z = 14 : 9. \end{cases}$

1597. $\begin{cases} ax + by + cz = r. \\ x : y = m : n. \\ y : z = p : q. \end{cases}$

1598. $\begin{cases} x + y + z = 9. \\ x + 2y + 4z = 15. \\ x + 3y + 9z = 23. \end{cases}$

1599. $\begin{cases} x + y + z = 3. \\ 2x + 4y + 8z = 13. \\ 3x + 9y + 27z = 34. \end{cases}$

1600. $\begin{cases} 7x + 6y + 7z = 100. \\ x - 2y + z = 0. \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$

1601. $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 110. \\ 5x + y - 4z = 0. \\ 2x - 3y + z = 0. \end{cases}$

1602. $\begin{cases} x + y + z = 9. \\ x + 2y + 3z = 14. \\ x + 3y + 6z = 20. \end{cases}$

1603. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 32. \\ 2x + 3y + z = 42. \\ 3x + y + 2z = 40. \end{cases}$

1604. $\begin{cases} x + y + 2z = 34. \\ x + 2y + z = 33. \\ 2x + y + z = 32. \end{cases}$

1605. $\begin{cases} 3x + 3y + z = 17. \\ 3x + y + 3z = 15. \\ x + 3y + 3z = 13. \end{cases}$

1606. $\begin{cases} 5x - y + 3z = a. \\ 5y - z + 3x = b. \\ 5z - x + 3y = c. \end{cases}$

1607. $\begin{cases} 7x + 11y + z = a. \\ 7y + 11z + x = b. \\ 7z + 11x + y = c. \end{cases}$

1608. $\begin{cases} x+2y+3z=15{,}4. \\ 3x+5y+7z=37{,}4. \\ 5x+8y+11z=59{,}4. \end{cases}$

1609. $\begin{cases} x+2y-z=4{,}6. \\ y+2z-x=10{,}1. \\ z+2x-y=5{,}7. \end{cases}$

1610. $\begin{cases} 0{,}2x+0{,}3y+0{,}4z=29. \\ 0{,}3x+0{,}4y+0{,}5z=38. \\ 0{,}4x+0{,}5y+0{,}7z=51. \end{cases}$

1611. $\begin{cases} x+2y-0{,}7z=21. \\ 3x+0{,}2y-z=24. \\ 0{,}9x+7y-2z=27. \end{cases}$

1612. $\begin{cases} 2\frac{1}{2}x=y+z+8. \\ 3\frac{1}{3}y=x+z+12. \\ 4\frac{1}{4}z=x+y+15. \end{cases}$

1613. $\begin{cases} x+y=1\frac{1}{2}z+8. \\ x+z=2\frac{2}{3}y-14. \\ y+z=3\frac{3}{4}x-32. \end{cases}$

1614. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+1}=2. \\ \dfrac{y+2}{z+1}=4. \\ \dfrac{z+3}{x+1}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

1615. $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{z+1}=2. \\ \dfrac{3y+z}{x+1}=2. \\ \dfrac{3z+x}{y+1}=2. \end{cases}$

1616. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{y-z}=10. \\ \dfrac{x+z}{x-y}=9. \\ \dfrac{y+z}{x+5}=1. \end{cases}$

1617. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{y+z}=2. \\ \dfrac{y+3}{x+z}=1. \\ \dfrac{z+3}{x+y}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

1618. $\begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2a. \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=2b. \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2c. \end{cases}$

1619. $\begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{a}. \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{b}. \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{c}. \end{cases}$

1620. $\begin{cases} \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=1. \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{z}=4. \\ \dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{z}=0. \end{cases}$

1621. $\begin{cases} \dfrac{6}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{5}{z}=4. \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{8}{y}+\dfrac{5}{z}=4. \\ \dfrac{9}{x}+\dfrac{12}{y}-\dfrac{10}{z}=4. \end{cases}$

1622. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{1}{5}. \\ \dfrac{xz}{x+z}=\dfrac{1}{6}. \\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{1}{7}. \end{cases}$

1623. $\begin{cases} \dfrac{xy}{4y-3x}=20. \\ \dfrac{xz}{2x-3z}=15. \\ \dfrac{yz}{4y-5z}=12. \end{cases}$

1624. $\begin{cases}(x+2)(2y+1)=(2x+7)y. \\ (x-2)(3z+1)=(x+3)(3z-1). \\ (y+1)(z+2)=(y+3)(z+1).\end{cases}$

1625. $\begin{cases}(2x-1)(y+1)=2(x+1)(y-1). \\ (x+4)(z+1)=(x+2)(z+2). \\ (y-2)(z+3)=(y-1)(z+1).\end{cases}$

1626. $\begin{cases}(x+1)(5y-3)=(7x+1)(2y-3). \\ (4x-1)(z+1)=(x+1)(2z-1). \\ (y+3)(z-2)=(3y-6)(2z-4).\end{cases}$

1627. $\begin{cases}x+3y-z=1. \\ y+3z-u=4. \\ z+3u-x=11. \\ u+3x-y=2.\end{cases}$

1628. $\begin{cases}3x+y+z=20. \\ x+4y+3u=30. \\ 6x+z+3u=40. \\ 8y+3z+5u=50.\end{cases}$

1629. $\begin{cases}y+z+5u=11. \\ z+x+4u=11. \\ x+y+3u=11. \\ x+z+8y=33.\end{cases}$

1630. $\begin{cases}x+y+z+u=144. \\ x+2y+2z+2u=267. \\ x+2y+3z+3u=359. \\ x+2y+3z+4u=410.\end{cases}$

1631. $\begin{cases}x-2y+3z-u=5. \\ y-2z+3u-x=0. \\ z-2u+3x-y=0. \\ u-2x+3y-z=5.\end{cases}$

1632. $\begin{cases}x+y+z+u=24. \\ x+2y+3z-9u=0. \\ 3x-y-5z+u=0. \\ 2x+3y-4z-5u=0.\end{cases}$

1633. $\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y-\frac{1}{3}z=1. \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{9}u=1. \\ \frac{1}{6}x+\frac{3}{5}z-\frac{1}{2}u=1. \\ \frac{3}{4}y-\frac{1}{5}z-\frac{1}{3}u=0.\end{cases}$

1634. $\begin{cases}2\frac{1}{2}x-1\frac{2}{3}y+2z=4. \\ 1\frac{3}{4}x-1\frac{1}{2}y+3u=1. \\ 2x-3\frac{1}{2}z+u=2. \\ 1\frac{1}{3}y-4\frac{1}{2}z+4u=3.\end{cases}$

1635. $\begin{cases}7x+5y+z-u=a. \\ 7y+5z+u-x=b. \\ 7z+5u+x-y=c. \\ 7u+5x+y-z=d.\end{cases}$

1636. $\begin{cases}11x+9y+z-u=a. \\ 11y+9z+u-x=b. \\ 11z+9u+x-y=c. \\ 11u+9x+y-z=d.\end{cases}$

1637. $\begin{cases}x+3y=19. \\ y+3z=8. \\ z+3u=7. \\ u+3v=11. \\ v+3x+15.\end{cases}$

1638. $\begin{cases}x+y=a. \\ y+z=b. \\ z+u+c. \\ u+v=d. \\ v+x=e.\end{cases}$

1639. $\begin{cases}2x+y+z=5. \\ 2y+z+u=5. \\ 2z+u+v=7. \\ 2u+v+x=12. \\ 2v+x+y=11.\end{cases}$

1640. $\begin{cases}x+2y-z=12. \\ y+2z-u=10. \\ z+2u-v=8. \\ u+2v-x=1. \\ v+2x-y=9.\end{cases}$

1641. $\begin{cases} x+y+z=a. \\ y+z+u=b. \\ z+u+v=c. \\ u+v+x=d. \\ v+x+y=e. \end{cases}$

1642. $\begin{cases} x-y+z=a. \\ y-z+u=b. \\ z-u+v=c. \\ u-v+x=d. \\ v+x+y=e. \end{cases}$

1643. $\begin{cases} x+y-u=a. \\ y+z-v=b. \\ z+u-x=c. \\ u+v-y=d. \\ v+x-z=e. \end{cases}$

1644. $\begin{cases} x+y-z=a. \\ y+z-u=b. \\ z+u-v=c. \\ u+v-x=d. \\ v+x-y=e. \end{cases}$

1645. $\begin{cases} y+z+u+v=a. \\ z+u+v+x=b. \\ u+v+x+y=c. \\ v+x+y+z=d. \\ x+y+z+u=e. \end{cases}$

1646. $\begin{cases} x+y+z-u=a. \\ y+z+u-v=b. \\ z+u+v-x=c. \\ u+v+x-y=d. \\ v+x+y-z=e. \end{cases}$

1647. $\begin{cases} y+z+u+v-x=a. \\ z+u+v+x-y=b. \\ u+v+x+y-z=c. \\ v+x+y+z-u=d. \\ x+y+z+u-v=e. \end{cases}$

1648. $\begin{cases} x+y+z-u-v=a. \\ y+z+u-v-x=b. \\ z+u+v-x-y=c. \\ u+v+x-y-z=d. \\ v+x+y-z-u=e. \end{cases}$

1649. $\begin{cases} 2x-y-z+2u-v=3a. \\ 2y-z-u+2v-x=3b. \\ 2z-u-v+2x-y=3c. \\ 2u-v-x+2y-z=3d. \\ 2v-x-y+2z-u=3e. \end{cases}$

1650. $\begin{cases} x+y+z+u+v=15. \\ x+2y+4z+8u+16v=57. \\ x+3y+9z+27u+81v=179. \\ x+4y+16z+64u+256v=453. \\ x+5y+25z+125u+625v=975. \end{cases}$

ГЛАВА V.

Составленіе уравненій со многими неизвѣстными.

§ **137.** Если въ задачѣ требуется опредѣлить нѣсколько неизвѣстныхъ, то большею частью такія задачи рѣшаются при помощи уравненій со многими неизвѣстными. Каждое неизвѣстное

при этомъ обозначаютъ отдѣльною буквою, и составляютъ столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ. Затѣмъ полученныя уравненія рѣшаются.

Покажемъ на примѣрахъ, какъ это дѣлается:

1) *Найти дробь, которая обращается въ* $\frac{1}{2}$, *если къ числителю и знаменателю ея прибавить по* 5, *и обращается въ* $\frac{1}{4}$, *если изъ числителя и знаменателя вычесть по* 1.

Обозначивъ числителя искомой дроби черезъ x и знаменателя черезъ y, получимъ уравненія:

$$\frac{x+5}{y+5}=\frac{1}{2} \text{ и } \frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{4}.$$

Откуда $x = 4$, $y = 13$. Слѣдовательно, искомая дробь равна $\frac{4}{13}$.

2) *Бассейнъ наполняется тремя трубами. Если открыть двѣ первыя трубы, то бассейнъ наполнится водою въ* 70 *минутъ; если открыть первую и третью трубы, то онъ наполнится въ* 84 *минуты; наконецъ, если открыть двѣ послѣднія трубы, то бассейнъ наполнится въ* 140 *минутъ. Во сколько минутъ наполнится бассейнъ черезъ каждую трубу отдѣльно?*

Положимъ, что бассейнъ можетъ наполниться черезъ первую трубу въ x минутъ, черезъ вторую въ y минутъ и черезъ третью въ z минутъ. Тогда въ одну минуту черезъ первую трубу наполняется $\frac{1}{x}$ часть бассейна, черезъ вторую $\frac{1}{y}$ часть и черезъ третью $\frac{1}{z}$ часть. Далѣе, изъ условія задачи имѣемъ уравненія:

$$70\,.\frac{1}{x}+70\,.\frac{1}{y}=1;\ 84\,.\frac{1}{x}+84\,.\frac{1}{z}=1;\ 140\,.\frac{1}{y}+140\,.\frac{1}{z}=1.$$

Допустивъ, что $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$ и $\frac{1}{z}=c$, получимъ уравненія:

$$70a+70b=1;\ 84a+84c=1;\ 140b+140c=1.$$

Откуда $a=\frac{1}{105}$, $b=\frac{1}{210}$, $c=\frac{1}{420}$ или $\frac{1}{x}=\frac{1}{105}$, $\frac{1}{y}=\frac{1}{210}$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{420}$; откуда $x=105$, $y=210$, $z=420$, т.-е., бассейнъ черезъ первую трубу можетъ наполниться въ 105 минутъ, черезъ вторую въ 210 и черезъ третью въ 420 минутъ.

3) *Три игрока сѣли играть въ карты съ тѣмъ условіемъ, что проигравшій долженъ заплатить остальнымъ столько, сколько каждый изъ нихъ имѣлъ до сыгранной партіи. Послѣ трехъ партій, проигранныхъ каждымъ поочередно, у всѣхъ оказалось поровну, а именно: по 24 рубля. Сколько было денегъ у каждаго до начала игры?*

Положимъ, что первый игрокъ имѣлъ до игры x рублей, второй y, третій z. И пусть первую партію проигралъ первый игрокъ, вторую — второй и третью — третій.

Послѣ первой партіи у перваго игрока осталось $x - y - z$ рублей, у второго стало $2y$, у третьяго $2z$ рублей.

Послѣ второй партіи у перваго игрока стало $2(x - y - z)$ рублей; у второго $2y - (x - y - z) - 2z = 3y - x - z$; у третьяго $4z$ рублей.

Послѣ третьей партіи у перваго игрока стало $4(x - y - z)$ рублей, у второго $2(3y - x - z)$; у третьяго $4z - 2(x - y - z) - (3y - x - z) = 7z - x - y$.

Выраженія: $4(x - y - z)$, $2(3y - x - z)$ и $7z - x - y$ должны по условію задачи равняться 24.

Такимъ образомъ, у насъ получилась система трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными:

$$4(x - y - z) = 24;\ 2(3y - x - z) = 24;\ 7z - x - y = 24.$$

Рѣшивъ ее, получимъ, что $x = 39$, $y = 21$, $z = 12$, т.-е, первый игрокъ имѣлъ до начала игры 39 руб., второй 21 и третій 12 руб.

Задачи:

1651. Сумма двухъ чиселъ равна 812, а разность 102. Найти эти числа.

1652. Въ двухъ кошелькахъ лежитъ 748 руб. Если переложить 24 рубля изъ перваго кошелька во второй, то въ послѣднемъ окажется въ 3 раза болѣе, чѣмъ въ первомъ. Сколько денегъ лежитъ въ каждомъ кошелькѣ?

1653. Разность двухъ чиселъ равна 360, а частное 7. Найти эти числа.

1654. Двое имѣютъ 1080 рублей. Если бы первый имѣлъ втрое болѣе того, что онъ имѣетъ, а второй вдвое, то первый имѣлъ бы на 340 руб. болѣе, чѣмъ второй. Сколько денегъ имѣетъ каждый?

1655. Двое имѣютъ 390 рублей. Если бы первый имѣлъ вчетверо болѣе того, что онъ имѣетъ, а второй втрое менѣе того, что онъ имѣетъ, то у нихъ было бы денегъ поровну. Сколько денегъ имѣетъ каждый?

1656. Въ двухъ бассейнахъ налита вода. Если бы въ первый бассейнъ прилить столько, сколько онъ имѣетъ и еще 20 ведеръ, а изъ второго вылить половину всего количества воды и еще 30 ведеръ, то въ обоихъ бассейнахъ будетъ воды поровну. Если же изъ перваго бассейна вылить половину заключающейся въ немъ воды и еще 30 ведеръ, а во второй прилить столько, сколько онъ имѣетъ и еще 20 ведеръ, то во второмъ будетъ въ 20 разъ болѣе, чѣмъ въ первомъ. Сколько ведеръ воды въ каждомъ бассейнѣ?

1657. Куплено 8 аршинъ краснаго сукна и 7 аршинъ синяго и заплачено 74 рубля; въ другой разъ купили по тѣмъ же цѣнамъ

4 арш. краснаго сукна и 5 арш. синяго и заплатили 46 рублей. Сколько стоитъ аршинъ сукна каждаго сорта?

1658. Купили 5 серебряныхъ подсвѣчниковъ и 4 дюжины столовыхъ ложекъ и заплатили за все 194 рубля. Въ другой разъ по тѣмъ же цѣнамъ купили 2 подсвѣчника и 3 дюжины столовыхъ ложекъ, при чемъ за подсвѣчники заплатили на 88 рублей меньше, чѣмъ за ложки. Что стоитъ подсвѣчникъ и что стоитъ ложка?

1659. Для починки дома наняли 12 плотниковъ и 7 столяровъ и платили всѣмъ имъ за каждый день работы 16 рублей, 60 коп. Когда же число плотниковъ увеличилось на 3, а столяровъ уменьшилось на 5, то пришлось платить всѣмъ рабочимъ ежедневно по 14 руб. Сколько получалъ ежедневно каждый плотникъ и каждый столяръ?

1660. Бассейнъ наполняется двумя трубами. Когда открыли первую трубу на 5 часовъ, а вторую на 7, то въ бассейнъ влилось 580 ведеръ; когда же первую трубу открыли на 7 часовъ, а вторую на 5, то въ бассейнъ влилось 620 ведеръ. Сколько ведеръ воды вливается въ часъ черезъ каждую трубу?

1661. Въ бассейнъ проведены двѣ трубы. Черезъ первую трубу вода вливается, а черезъ вторую — вытекаетъ. Если первую трубу открыть на 8 часовъ, а вторую на 5, то въ бассейнѣ окажется 219 ведеръ воды; если же первую открыть на 9 часовъ, а вторую на 8, то въ бассейнѣ окажется 149 ведеръ воды. Сколько ведеръ воды вливается черезъ первую трубу въ часъ и сколько выливается черезъ вторую въ часъ?

1662. Я задумалъ два числа. Если первое умножу на 5, а второе раздѣлю на 7, и полученные результаты сложу, то сумма будетъ равна 390; если же, наоборотъ, первое число раздѣлю на 7, а второе умножу на 5, то въ суммѣ получимъ 1410. Какія числа я задумалъ?

1663. Я задумалъ два числа. Если я первое умножу на 9, а второе раздѣлю на 4, то первый результатъ будетъ больше второго на 510. Если же я первое раздѣлю на 4 и къ частному придамъ 345, то получу утроенное второе изъ задуманныхъ чиселъ. Какія числа я задумалъ?

1664. Купецъ послалъ два боченка, чтобы наполнили бо̀льшій боченокъ виномъ въ 1 руб., 50 коп. бутылку и меньшій въ 90 коп. бутылку, и по расчету послалъ за вино 444 руб. Но по ошибкѣ въ бо̀льшій боченокъ налили вина второго сорта, а въ меньшій перваго сорта, вслѣдствіе чего купецъ получилъ сдачи съ посланныхъ денегъ 24 руб. Сколько бутылокъ вмѣщалъ каждый боченокъ?

1665. Найти дробь, которая обращается въ $\frac{3}{5}$, если къ числителю ея прибавить 8, и обращается въ $\frac{1}{2}$, если отъ знаменателя ея отнять 11.

1666. Найти дробь, которая обращается въ $\frac{4}{13}$, если къ числителю и знаменателю прибавить по 4, и въ $\frac{1}{10}$, если отъ числителя и знаменателя отнять по 5.

1667. Найти число, которое при дѣленіи на 8 и 9 даетъ остатки 1 и 2, при чемъ первое частное больше второго на 3.

1668. Найти число, которое при дѣленіи на 7 и 8 даетъ въ остаткѣ 6 и 7, при чемъ первое частное на 11 больше второго.

1669. Отцу и сыну вмѣстѣ 75 лѣтъ. 10 же лѣтъ тому назадъ отецъ былъ старше сына въ 10 разъ. Сколько лѣтъ отцу и сколько сыну?

1670. 3 года тому назадъ отецъ былъ старше сына въ 6 разъ, а черезъ 15 лѣтъ отецъ будетъ старше сына въ 2,4 раза. Сколько лѣтъ отцу и сколько сыну?

1671. Двое должны 600 руб. Первый могъ бы заплатить весь этотъ долгъ, если бы къ его деньгамъ прибавить $\frac{3}{4}$ второго; второй же могъ бы заплатить этотъ долгъ, если бы къ его деньгамъ прибавить $\frac{4}{5}$ перваго. Сколько денегъ имѣетъ каждый?

1672. Нѣкто имѣлъ 1600 руб. въ двухъ бумажникахъ. Когда онъ переложилъ изъ второго въ первый столько, сколько въ немъ было; потомъ изъ перваго во второй столько, сколько въ послѣднемъ осталось, — то денегъ въ каждомъ оказалось поровну. Сколько денегъ было въ каждомъ бумажникѣ сначала?

1673. А и Б играли на билліардѣ съ условіемъ, что каждый проигравшій долженъ платить столько, сколько выигравшій имѣлъ денегъ передъ сыгранной партіей. Первую и третью партіи проигралъ А, а вторую и четвертую проигралъ Б. Сколько денегъ имѣлъ каждый до игры, если извѣстно, что по окончаніи четвертой партіи у А оказалось 32 рубля, а у Б 48 рублей?

1674. Найти двузначное число, сумма цифръ котораго = 13. Если мы къ нему справа и слѣва припишемъ по 1, то первое изъ полученныхъ такимъ образомъ трехзначныхъ чиселъ будетъ больше второго на 423.

1675. Найти двузначное число, сумма цифръ котораго равна 11. Если же мы въ серединѣ и слѣва его припишемъ по 1, то первое изъ полученныхъ трехзначныхъ чиселъ при дѣленіи на второе дастъ въ частномъ 2 и въ остаткѣ 42.

1676. Найти двузначное число, которое при дѣленіи на сумму его разрядовъ даетъ въ частномъ 7 и въ остаткѣ 3, при дѣленіи же на разность разрядовъ даетъ въ частномъ 18 и въ остаткѣ 1.

1677. Нѣкто имѣлъ 16000 рублей. Отдавъ одну часть по 6% и другую по $5\frac{1}{2}$%, онъ получалъ ежегодно дохода 940 рублей. Опредѣлить каждую часть.

1678. Нѣкто имѣлъ 1200 руб.; одну часть своихъ денегъ онъ помѣстилъ по 4%, а другую по $6\frac{1}{2}$%. Найти эти части, если извѣстно, что съ первой онъ получалъ въ годъ доходу на 75 коп. болѣе, чѣмъ со второй.

1679. Нѣкто получаетъ со своего капитала 420 руб. дохода Если бы капиталъ приносилъ на $\frac{1}{2}$% болѣе, то доходъ увеличился бы на 35 рублей. Какъ великъ капиталъ и по скольку процентовъ онъ помѣщенъ?

1680. Чайный торговецъ имѣетъ чай двухъ сортовъ. Если онъ смѣшаетъ 5 фунтовъ одного сорта съ 7 фунт. другого, то фунтъ смѣси будетъ стоить 2 руб., 30 коп.; если же смѣшаетъ 6 фунт. перваго сорта съ 4 фунт. второго, то фунтъ смѣси будетъ стоить 2 руб., 52 коп. Что стоитъ фунтъ чаю каждаго сорта?

1681. Въ одной бочкѣ находится смѣсь, состоящая изъ 20 ведеръ спирту и 30 вед. воды, а въ другой — изъ 30 ведеръ спирту и 70 вед. воды. Сколько ведеръ смѣси надо взять изъ каждой бочки, чтобы образовать 32 ведра новой смѣси, въ которой спиртъ и вода находились бы въ отношеніи 3 : 5?

1682. Сколько надо взять спирта въ 60 градусовъ и въ 80 градусовъ, чтобы получить 50 ведеръ спирта въ 65 градусовъ?

1683. Имѣемъ два сплава изъ серебра и мѣди: въ первомъ серебро относится къ мѣди, какъ 8 : 3, а во второмъ, какъ 4 : 7. Сколько надо взять отъ каждаго сплава, чтобы составить 16 фунтовъ новаго сплава, въ которомъ серебро относилось бы къ мѣди, какъ 5 : 6?

1684. Со станцій А и Б, находящихся на разстояніи 600 верстъ выходятъ два поѣзда навстрѣчу другъ другу. Если первый поѣздъ выйдетъ 6 часами раньше второго, то они встрѣтятся черезъ $7\frac{1}{2}$ часовъ по выходѣ второго; если же второй выйдетъ часомъ раньше перваго, то встрѣча произойдетъ черезъ 10 часовъ, 15 мин. послѣ выхода перваго. Сколько верстъ дѣлаетъ каждый поѣздъ въ часъ?

1685. Въ бассейнъ, вмѣстимостью 720 ведеръ, проведены двѣ трубы. Если открыть первую трубу на 4 часа и затѣмъ открыть вторую трубу, то бассейнъ черезъ обѣ трубы наполнится въ 4 часа, 48 минутъ послѣ открытія второй трубы. Если же вторую трубу открыть на 4 часа и потомъ открыть первую, то бассейнъ наполнится въ 5 час., 36 минутъ послѣ открытія первой трубы. Сколько ведеръ воды вливается въ часъ черезъ каждую трубу?

1686. Со станціи А вышелъ поѣздъ желѣзной дороги; черезъ 2 часа послѣ отправленія случилась нѣкоторая порча локомотива, на исправленіе которой потребовалось часъ времени; послѣ этого поѣздъ двигался съ $\frac{4}{5}$ первоначальной скорости; вслѣдствіе всѣхъ этихъ причинъ поѣздъ опоздалъ на станцію К на 5 часовъ. Если бы остановка произошла на 400 верстъ далѣе, то при всѣхъ прежнихъ обстоятельствахъ поѣздъ опоздалъ бы только на 3 часа. Опредѣлить разстояніе между А и К и первоначальную скорость поѣзда.

1687. Изъ бассейна вода вытекаетъ черезъ кранъ. Спустя часъ послѣ того, какъ кранъ былъ открытъ, онъ засорился, и для очищенія его потребовалось часъ времени; послѣ этого кранъ сталъ давать въ часъ только $\frac{3}{5}$ того количества воды, какое давалъ прежде; вслѣдствіе всѣхъ этихъ причинъ для опорожненія бассейна потребовалось 3-мя часами больше обыкновеннаго. Если бы кранъ засорился, выливши 50-ю ведрами больше, то при всѣхъ прочихъ обстоятельствахъ, время, въ

которое вся вода вытекла бы изъ бассейна, было бы больше обыкновеннаго на 1 часъ, 40 мин. Сколько ведеръ воды вмѣщаетъ бассейнъ, и сколько ведеръ воды давалъ кранъ въ часъ до засоренія?

1688. Пароходъ прошелъ въ 10 часовъ 126 верстъ по теченію рѣки и потомъ 36 верстъ противъ теченія; въ другой разъ онъ прошелъ въ тѣ же 10 часовъ 90 верстъ по теченію рѣки и 60 верстъ противъ теченія. Опредѣлить скорость парохода въ стоячей водѣ и быстроту теченія рѣки.

1689. Найти два числа, произведеніе которыхъ увеличивается на 129, если прибавить къ первому 8 и ко второму 3, — и уменьшается на 71, если отъ перваго отнять 4, а отъ второго 5.

1690. Найти стороны прямоугольника, если извѣстно, что площадь его увеличивается на 58 кв. футовъ, если одну сторону увеличить на 12 фут., а другую уменьшить на 5 фут., и наоборотъ, уменьшается на 10 кв. фут., если первую сторону уменьшить на 5, а вторую увеличить на 12 футовъ.

1691. Найти катеты прямоугольнаго треугольника, если извѣстно, что площадь его увеличивается на 30 кв. арш., если оба катета увеличить на 2 аршина, и уменьшается на 48 кв. арш., если первый катетъ увеличить на 4 арш., а второй уменьшить на 4 аршина.

1692. Разность квадратовъ двухъ чиселъ равна 481. Если же каждое изъ нихъ увеличить на 5, то разность квадратовъ будетъ 611. Найти эти числа.

1693. Площадь одного квадрата больше площади другого на 65 кв. фут. Если же каждую сторону перваго уменьшимъ на 1 ф., а второго увеличимъ на 1 футъ, то разность между площадями будетъ равна 39 кв. фут. Найти стороны квадрата.

1694. Какой надо имѣть капиталъ и по скольку % надо отдать его, чтобы онъ черезъ 5 мѣсяцевъ обратился въ 1230 рублей, а черезъ $2\frac{1}{2}$ года въ 1380 руб.?

1695. Въ бассейнъ проведены двѣ трубы. Если открыть обѣ трубы на 20 минутъ, то наполнится $\frac{11}{30}$ частей бассейна; если же открыть первую трубу на 10 минутъ, а вторую на 30 мин., то наполнится $\frac{23}{60}$ частей бассейна. Во сколько времени можетъ наполниться бассейнъ черезъ каждую трубу?

1696. Два работника должны исполнить нѣкоторую работу. Если первый будетъ работать 6 час., а второй 8 час., то они исполнятъ $\frac{25}{36}$ всей работы; если же, наоборотъ, первый будетъ работать 8 часовъ, а второй 6 час., то они исполнятъ $\frac{2}{3}$ всей работы. Во сколько часовъ отдѣльно каждый работникъ можетъ окончить всю работу?

1697. Два каменщика должны были построить стѣну. Если первый будетъ работать 8 дней, то остальную часть работы они кончатъ въ 20 дней; если же второй будетъ работать сначала 11 дней, то остальную часть работы они могутъ окончить въ $16\frac{11}{12}$ дня. Во сколько дней можетъ построить стѣну отдѣльно каждый каменщикъ?

1698. Сплавъ, вѣсомъ 298 фунтовъ, состоящій изъ цинка и свинца, теряетъ въ водѣ 36 фунтовъ. Сколько фунтовъ находится въ этомъ сплавѣ того и другого металла, если 34 фунта свинца теряютъ въ водѣ 3 фун., а 27 фун. цинка теряютъ 4 фунта?

1699. Сумма 3 чиселъ равна 330. Найти эти числа, если извѣстно, что первое число въ 4 раза больше второго; если же отъ суммы двухъ первыхъ отнимемъ третье, то получимъ 30.

1700. Раздѣлить 720 на такія четыре части, чтобы сумма первой и третьей была меньше на 80 суммы второй и четвертой; разность же между I и III на 120 меньше разности между II и IV. Наконецъ, частное, полученное отъ дѣленія первой части на четвертую, равно 2.

1701. Найти три числа по слѣдующимъ условіямъ: если каждое число отнимать послѣдовательно отъ суммы двухъ другихъ, то получимъ разности: 1, 2 и 3.

1702. 3 мѣшка муки вѣсятъ вмѣстѣ 28 пудовъ; первый и второй мѣшокъ на 6 пудовъ тяжелѣе третьяго; второй же съ третьимъ тяжелѣе перваго на 10 пудовъ. Опредѣлить вѣсъ каждаго мѣшка.

1703. Периметръ треугольника равенъ 39 футамъ. Если мы первую сторону увеличимъ на 5 фут., а вторую удвоимъ, то периметръ новаго треугольника на 17 футовъ будетъ больше периметра даннаго треугольника. Если же мы первую сторону учетверимъ, вторую утроимъ и третью удвоимъ, то периметръ новаго треугольника будетъ на 71 футъ больше периметра даннаго треугольника. Опредѣлить стороны треугольника.

1704. Куплено 8 лошадей, 12 коровъ и 15 овецъ и заплачено за все 820 руб. Опредѣлить, сколько стоитъ каждая лошадь, если извѣстно, что цѣна лошади и коровы вмѣстѣ превышаетъ цѣну овцы въ 20 разъ; стоимость же коровы на 26 рублей превышаетъ стоимость каждой овцы.

1705. Купецъ продалъ одному покупателю 7 пудовъ пшеничной муки, 4 пуда ржаной и 3 пуда крупъ за 20 руб., 30 коп.; другому покупателю 6 пудовъ пшеничной муки, 5 пуд. ржан. и 2 пуда крупъ за 17,8 руб.; третьему 7 пуд. крупъ и 2 пуда ржаной муки за 12 руб., 10 коп. Во сколько цѣнилъ онъ пудъ пшеничной муки, ржаной и крупъ?

1706. Я задумалъ три числа, сумма которыхъ равна 31. Если я умножу эти числа послѣдовательно на 4, 5 и 6, то сумма полученныхъ чиселъ будетъ равна 165; если же я раздѣлю ихъ послѣдовательно на 4, 5 и 6, то сумма полученныхъ частныхъ будетъ равна 6. Какія числа я задумалъ?

1707. Я задумалъ три числа. Сумма двухъ послѣднихъ меньше перваго на 17. Если я первое изъ задуманныхъ чиселъ раздѣлю на второе, то въ частномъ получу 2 и въ остаткѣ 4; если же раздѣлю второе на третье, то въ частномъ получу 4 и въ остаткѣ 1. Какія числа я задумалъ?

1708. Бассейнъ наполняется 3 трубами. Если первую трубу открыть на 7 часовъ, вторую на 3 и третью на часъ, то въ бассейнъ вольется 665 ведеръ воды; если же открыть первую трубу на часъ, вторую на 3 и третью на 7, то въ бассейнѣ окажется 515 ведеръ воды. Сколько ведеръ воды вливается въ бассейнъ черезъ каждую трубу въ одинъ часъ, если извѣстно, что вторая труба даетъ вдвое болѣе воды, чѣмъ третья?

1709. Въ бассейнъ проведены 3 трубы; черезъ первыя двѣ вода вливается, а черезъ третью вытекаетъ. Если открыть всѣ трубы на 3 часа, то въ бассейнѣ окажется 90 ведеръ воды; если же открыть первую трубу на 5 часовъ, вторую на 6 и третью на 7, то въ бассейнѣ окажется 20 вед. воды. Сколько воды вливается черезъ каждую изъ первыхъ двухъ трубъ и сколько вытекаетъ въ часъ черезъ послѣднюю, если извѣстно, что первая труба въ 5 часовъ даетъ столько воды, сколько вторая въ 7 часовъ?

1710. Сумма цифръ трехзначнаго числа равна 13; если отнять отъ этого числа 594, то получимъ число, изображенное тѣми же цифрами, но въ обратномъ порядкѣ. Найти это число, если извѣстно, что число сотенъ на 1 больше суммы цифръ десятковъ и единицъ.

1711. Нѣкто отдалъ одну часть своего капитала по 4%, другую по 4,5% и третью по 5% и получилъ доходу со всего капитала 1245 руб.; если бы онъ отдалъ первую часть по 4,5%, вторую по 6% и третью по 4%, то доходъ его увеличился бы на 45 руб. Опредѣлить капиталъ, если извѣстно, что третья часть была въ 2 раза болѣе первой.

1712. Сочиненіе состоитъ изъ трехъ томовъ. Число страницъ перваго тома относится къ числу страницъ второго тома, какъ 4 : 5; число же страницъ второго тома относится къ числу страницъ третьяго, какъ 16 : 9. Опредѣлить число страницъ каждаго тома, если извѣстно, что во второмъ томѣ на 116 страницъ меньше, чѣмъ въ первомъ и третьемъ вмѣстѣ.

1713. А, Б и В хотятъ купить имѣніе, стоящее 20000 руб. Опредѣлить, сколько каждый изъ нихъ имѣетъ денегъ, если извѣстно, что А могъ бы заплатить за имѣніе, если бы къ его деньгамъ прибавить $\frac{4}{5}$ денегъ Б и $\frac{19}{25}$ денегъ В; Б также могъ бы заплатить за имѣніе, если бы къ его деньгамъ прибавить $\frac{2}{3}$ денегъ А и $\frac{4}{5}$ денегъ В, и В могъ бы заплатить, если бы къ его деньгамъ прибавить $\frac{3}{4}$ денегъ А и $\frac{11}{16}$ денегъ Б.

1714. Найти 3 числа, обладающихъ слѣдующими свойствами: если отъ перваго отнять 7 и прибавить ко второму, то полученная разность будетъ относиться къ суммѣ, какъ 7 : 5; если отъ второго отнять 7 и прибавить къ третьему, то разность будетъ относиться къ суммѣ, какъ 1 : 4; наконецъ, если отъ третьяго отнять 7 и прибавить къ первому, то разность будетъ относиться къ суммѣ, какъ 5 : 21.

1715. Я задумалъ три числа. Если на первое число я раздѣлю 15, на второе 12 и на третье 8 и полученныя частныя сложу, то въ суммѣ получу 6. Если же на первое изъ заду-

манныхъ чиселъ раздѣлю 30, на второе 36 и на третье 40 и изъ суммы первыхъ двухъ частныхъ вычту третье, то получу 7. Наконецъ, если я на каждое изъ задуманныхъ чиселъ раздѣлю 40 и изъ двухъ послѣднихъ частныхъ вычту первое, то получу 3,(6). Найти задуманныя числа.

1716. А, Б и В должны окончить нѣкоторую работу. А и Б могутъ окончить ее въ 24 дня; А и В въ 40 дней; Б и В въ 30 дней. Во сколько дней можетъ окончить работу отдѣльно каждый изъ нихъ?

1717. Бассейнъ наполняется тремя трубами. Если открыть одну первую трубу на 18 часовъ, то бассейнъ наполнится двумя послѣдними черезъ $8\frac{8}{9}$ часа послѣ закрытія первой трубы; если же открыть одну вторую трубу на 8 часовъ, то бассейнъ наполнится черезъ остальныя трубы черезъ $14\frac{4}{19}$ часа послѣ закрытія второй; наконецъ, если открыть послѣднюю трубу на 30 час., то бассейнъ наполнится двумя первыми черезъ $4\frac{4}{17}$ часа послѣ закрытія третьей трубы. Во сколько времени наполнится бассейнъ черезъ каждую трубу отдѣльно?

1718. Въ бассейнъ проведены 3 трубы; черезъ первую онъ наполняется, а черезъ послѣднія двѣ онъ опоражнивается. Если открыть двѣ первыя трубы, то бассейнъ наполнится въ 30 час.; если открыть первую и третью, то бассейнъ наполнится въ 35 час.; если же открыть обѣ послѣднія трубы, то полный бассейнъ можетъ опорожниться въ 14 час. Во сколько времени можетъ бассейнъ наполниться черезъ первую трубу и опорожниться черезъ каждую изъ двухъ послѣднихъ трубъ?

1719. Въ трехъ боченкахъ находилось вино; сначала изъ перваго влили во второй и въ третій столько, сколько было въ каждомъ изъ нихъ; потомъ изъ второго перелили въ остальные столько, сколько каждый изъ нихъ имѣлъ до этого; наконецъ, изъ третьяго перелили въ остальные столько, сколько въ каждомъ было до этого. Послѣ этого въ каждомъ боченкѣ оказалось по 48 бутылокъ вина. Сколько было вина въ каждомъ боченкѣ сначала?

1720. Четверо играли въ карты съ условіемъ, что каждый проигравшій долженъ платить остальнымъ столько, сколько каждый изъ нихъ имѣлъ передъ сыгранной партіей. Сколько было денегъ у каждаго до начала игры, если извѣстно, что послѣ четырехъ партій, проигранныхъ каждымъ поочередно, у всѣхъ оказалось по 48 рублей?

1721. Сумма двухъ чиселъ равна a, а разность b; найти эти числа.

1722. Двое имѣютъ a рублей; если бы первый имѣлъ въ m разъ болѣе того, что онъ имѣетъ, а второй въ n разъ менѣе того, что онъ имѣетъ, то у нихъ было бы денегъ поровну. Сколько денегъ имѣетъ каждый?

1723. Куплено a аршинъ краснаго сукна и b аршинъ синяго и заплачено c рублей; въ другой разъ купили по тѣмъ же цѣнамъ a_1 арш. краснаго сукна и b_1 арш. синяго и заплатили c_1 рублей. Сколько стоитъ аршинъ каждаго сорта?

1724. Въ бассейнъ проведены двѣ трубы. Черезъ первую бассейнъ наполняется, а черезъ вторую вода вытекаетъ. Если открыть первую трубу на a часовъ, а вторую на b час., то въ бассейнѣ окажется m ведеръ воды; если же первую открыть на c часовъ, а вторую на d часовъ, то въ бассейнѣ окажется n ведеръ воды Сколько ведеръ воды вливается черезъ первую трубу въ часъ и сколько вытекаетъ черезъ вторую трубу въ часъ?

1725. Я задумалъ два числа. Если я первое умножу на a, а второе раздѣлю на b, то первый результатъ будетъ больше второго на c; если же я первое число раздѣлю на a_1 и къ частному придамъ c_1, то получу второе число. Какія числа я задумалъ?

1726. Найти дробь, которая обращается въ m, если къ числителю и знаменателю ея прибавить по a, и обращается въ n, если отъ числителя и знаменателя ея отнять по b.

1727. m лѣтъ тому назадъ отецъ былъ старше сына въ k разъ, а черезъ n лѣтъ онъ будетъ старше сына въ k_1 разъ. Сколько лѣтъ отцу и сколько сыну?

1728. Нѣкто имѣлъ a рублей. Одну часть своихъ денегъ онъ помѣстилъ по p %, а другую часть по p_1 % и получаетъ со всего капитала b рублей ежегоднаго дохода. Опредѣлить каждую часть.

1729. Чайный торговецъ имѣетъ чай двухъ сортовъ. Если онъ смѣшаетъ m фунтовъ перваго сорта съ n фун. второго, то получится смѣсь цѣною въ a рублей фунтъ; если же онъ смѣшаетъ m_1 фунтовъ перваго сорта съ n_1 фунтами второго, то фунтъ смѣси будетъ стоить b рублей. Что стоитъ фунтъ чаю каждаго сорта?

1730. Имѣемъ два сплава изъ серебра и мѣди; въ первомъ серебро относится къ мѣди, какъ $m : n$, а во второмъ, какъ $p : q$. Сколько надо взять отъ каждаго сплава, чтобы получить сплавъ въ s фунтовъ, въ которомъ серебро относилось бы къ мѣди, какъ $a : b$?

1731. Со станцій А и Б, находящихся на разстояніи d верстъ, выходятъ два поѣзда навстрѣчу другъ другу. Если первый поѣздъ выйдетъ m часами раньше второго, то они встрѣтятся черезъ n часовъ послѣ выхода второго поѣзда. Если же второй поѣздъ выйдетъ p часами раньше перваго, то они встрѣтятся черезъ q часовъ послѣ выхода перваго. Сколько верстъ дѣлаетъ въ часъ каждый поѣздъ?

1732. Два тѣла движутся по окружности, длина которой m аршинъ; они встрѣчаются черезъ каждыя a сек., когда идутъ по одному направленію, и черезъ каждыя b секундъ, когда идутъ навстрѣчу другъ другу. Сколько аршинъ проходитъ каждое тѣло въ секунду?

1733. Пароходъ прошелъ въ m часовъ a верстъ по теченію рѣки и b верстъ противъ теченія; въ другой разъ онъ прошелъ въ тѣ же m часовъ c верстъ по теченію рѣки и d верстъ противъ теченія. Опредѣлить скорость парохода въ стоячей водѣ и быстроту теченія рѣки.

1734. Найти стороны прямоугольника, если извѣстно, что площадь его увеличивается на a кв. арш., если одну сторону его увеличить на k, а другую на k_1 аршинъ, и уменьшается на b квадратныхъ арш., если одну сторону его уменьшить на r арш., а другую на r_1 аршинъ.

1735. Площадь одного квадрата больше площади другого на a кв. футовъ; если же мы каждую сторону перваго уменьшимъ на m фут., а второго увеличимъ на столько же, то площадь перваго квадрата будетъ больше площади второго на b кв. фут. Найти стороны квадратовъ.

1736. Два работника должны исполнить нѣкоторую работу. Если первый будетъ работать a часовъ, а второй b часовъ, то они исполнятъ $\frac{1}{m}$ часть всей работы; если же, наоборотъ, первый будетъ работать b часовъ, а второй a часовъ, то они исполнятъ $\frac{1}{n}$ часть всей работы. Во сколько часовъ отдѣльно каждый можетъ исполнить всю работу?

1737. Сумма 3-хъ чиселъ равна a. Найти эти числа, если извѣстно, что первое число больше второго въ m разъ; если же отъ суммы двухъ первыхъ отнять третье, то получимъ b.

1738. Найти три числа по слѣдующимъ условіямъ: если каждое число послѣдовательно отнимать отъ суммы двухъ другихъ, то получимъ разности: a, b и c.

1739. Въ бассейнъ проведены три трубы; черезъ первыя двѣ вода вливается, а черезъ третью вытекаетъ. Если открыть всѣ трубы на a часовъ, то въ бассейнѣ окажется p ведеръ воды; если же открыть первую трубу на b часовъ, вторую на c и третью на d, то въ бассейнѣ окажется q ведеръ. Сколько ведеръ воды вливается въ часъ черезъ каждую изъ двухъ первыхъ трубъ и сколько вытекаетъ черезъ послѣднюю, если извѣстно, что первая труба даетъ въ m часовъ столько, сколько вторая въ n часовъ?

1740. Сочиненіе состоитъ изъ трехъ томовъ. Число страницъ перваго тома относится къ числу страницъ второго тома, какъ $m:n$; число страницъ второго тома относится къ числу страницъ третьяго, какъ $p:q$. Опредѣлить число страницъ каждаго тома, если извѣстно, что во второмъ томѣ на a страницъ меньше, чѣмъ въ первомъ и третьемъ вмѣстѣ.

1741. Въ бассейнъ проведены 3 трубы; черезъ первую трубу бассейнъ наполняется, а черезъ двѣ послѣднія опоражнивается. Если открыть первую и вторую трубы, то пустой бассейнъ наполнится въ b часовъ; наконецъ, если открыть двѣ послѣднія трубы, то полный бассейнъ можетъ опорожниться въ c часовъ. Во

сколько времени можетъ наполниться бассейнъ черезъ первую трубу и опорожниться черезъ каждую изъ двухъ послѣднихъ трубъ?

1742. Въ пяти боченкахъ находилось вино. Сначала изъ перваго боченка перелили въ остальные столько, сколько было въ каждомъ; потомъ изъ второго перелили въ остальные столько, сколько оказалось передъ этимъ въ каждомъ. Такимъ же образомъ поступили послѣ съ третьимъ, четвертымъ и пятымъ боченкомъ. Когда вино перелили изъ пятаго боченка въ остальные, то въ каждомъ боченкѣ оказалось по a бутылокъ вина. Сколько было вина въ каждомъ боченкѣ сначала?

ГЛАВА VI.

Изслѣдованіе уравненій первой степени.

А. Уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ.

§ **138**. Рѣшая различныя задачи при помощи уравненій, мы получали отвѣты на вопросы каждой задачи. Однако нельзя сказать, что всякое рѣшеніе, полученное изъ уравненія, удовлетворяетъ требованіямъ вопроса. Иногда случается, что рѣшеніе, вполнѣ удовлетворяющее составленному уравненію, вмѣстѣ съ тѣмъ представляетъ совершенно невозможный отвѣтъ на вопросъ задачи. Пояснимъ это примѣромъ.

Купецъ имѣлъ двухъ сортовъ сукно: синее и красное; всего 100 аршинъ. Когда онъ продалъ четверть всего количества перваго сорта и пятую — второго, то у него осталось 60 аршинъ. Сколько аршинъ синяго и сколько краснаго сукна было у купца?

Обозначивъ черезъ x число аршинъ синяго и черезъ $100-x$ число аршинъ краснаго сукна, мы получимъ уравненіе:

$$\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{5}\,(100-x)=100-60.$$

Рѣшивъ его, найдемъ, что $x=400$. Очевидно, что этотъ отвѣтъ не годится для данной задачи; синяго сукна не можетъ быть 400 аршинъ, потому что обоихъ сортовъ было всего только 100 аршинъ.

Изъ этого примѣра мы видимъ, что недостаточно еще рѣшить задачу при помощи уравненій, является необходимость **изслѣдовать** ее.

§ **139**. *Изслѣдовать задачу значитъ узнать, возможна ли она или невозможна, а также, не представляетъ ли она въ своемъ рѣшеніи какихъ-либо особенныхъ случаевъ.*

Чтобы изслѣдовать задачу, надо рѣшить ее въ общемъ видѣ и разсмотрѣть, какія значенія можетъ имѣть полученное рѣшеніе.

Но прежде, чѣмъ приступить къ изслѣдованію отдѣльныхъ задачъ, изслѣдуемъ мы уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

§ **140.** Общій видъ уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ есть слѣдующій:

$$ax = b,$$

гдѣ a и b суть цѣлыя количества, при чемъ a представляетъ сумму всѣхъ коэффиціентовъ (какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ) при неизвѣстномъ, а b — сумму извѣстныхъ членовъ.

Изъ этого уравненія имѣемъ:

$$x = \frac{b}{a}.$$

Выраженіе: $\frac{b}{a}$ называется общимъ рѣшеніемъ для уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Разсмотримъ, какія значенія это рѣшеніе можетъ имѣть.

Такъ какъ a и b представляютъ сумму положительныхъ и отрицательныхъ количествъ, то оба они 1) могутъ имѣть одинаковые знаки, т.-е., оба эти количества могутъ быть или положительными, или отрицательными, 2) могутъ имѣть разные знаки, т.-е., одно изъ нихъ можетъ быть положительнымъ, а другое отрицательнымъ, 3) можетъ b равняться нулю, но a не равняться, 4) можетъ a равняться нулю, а b не равняться, и 5) наконецъ, оба эти количества могутъ равняться нулю. Соотвѣтственно всему этому могутъ быть слѣдующія рѣшенія:

§ **141. Рѣшенія положительныя.** Если a и b имѣютъ одинаковые знаки, то для x получается величина положительная, и такое рѣшеніе называется *положительнымъ*

Положительныя рѣшенія большею частью представляютъ *прямой отвѣтъ* на вопросъ задачи. Въ этомъ мы не разъ имѣли возможность убѣдиться при рѣшеніи задачъ.

Но иногда положительныя рѣшенія не удовлетворяютъ вопросу и этимъ показываютъ *невозможность* самаго вопроса. Это бываетъ тогда, когда искомое неизвѣстное подчиняется нѣкоторымъ условіямъ, которыя не могутъ быть выражены въ уравненіи; напр., если неизвѣстное должно быть цѣлымъ числомъ или не превышать извѣстнаго предѣла. Пояснимъ это на примѣрахъ.

1) *Скотопромышленникъ продалъ 30 штукъ скота: коровъ и овецъ, за 492 рубля. Сколько онъ продалъ коровъ, если за корову онъ бралъ 40 рублей, а за овцу 4 рубля?*

Обозначивъ искомое число коровъ черезъ x, получимъ, что овецъ онъ продалъ $30-x$ штукъ. За коровъ онъ получилъ $40x$ рублей, а за овецъ $(30-x)\,4$ рублей. Слѣдовательно, у насъ получилось уравненіе:

$$40x + (30-x)\,4 = 492.$$

Откуда $x = 10\frac{1}{3}$. Это рѣшеніе, хотя и удовлетворяетъ уравненію, но не годится для данной задачи, потому что, по смыслу, искомое неизвѣстное должно быть числомъ цѣлымъ. Найденное рѣшеніе показываетъ невозможность вопроса при данныхъ условіяхъ.

2) *Который теперь часъ, если извѣстно, что число часовъ, прошедшихъ отъ полуночи, больше удвоеннаго числа часовъ, оставшихся до полудня, на 18?*

Обозначивъ число часовъ, прошедшихъ отъ полуночи, черезъ x, а оставшихся до полудня, черезъ $12-x$, получимъ уравненіе:

$$x - 2\,(12-x) = 18.$$

Откуда $x = 14$. Это рѣшеніе также не годится для данной задачи, такъ какъ, по условію задачи, искомое не можетъ быть больше 12. Слѣдовательно, данная задача невозможна.

Точно такъ же невозможна задача, приведенная нами въ § 138, потому что число аршинъ синяго сукна не можетъ быть больше 100.

§ **142. Отрицательныя рѣшенія.** Если количества: b и a имѣютъ разные знаки, то для x получается величина отрицательная, и самое рѣшеніе называется *отрицательнымъ*.

Отрицательныя рѣшенія, удовлетворяя уравненію, показываютъ большею частью *невозможность* вопроса. Въ частныхъ же случаяхъ оно можетъ быть прямымъ отвѣтомъ на вопросъ задачи. Это бываетъ тогда, когда вопросъ допускаетъ двоякія рѣшенія: положительныя и отрицательныя. Напримѣръ:

1) (Возможное рѣшеніе). *Какое число* (положительное или отрицательное) *надо придать къ числителю и знаменателю дроби* $\frac{11}{21}$, *чтобы получить* $\frac{2}{7}$?

Изъ условія задачи имѣемъ уравненіе:

$$\frac{11+x}{21+x}=\frac{2}{7}.$$

Откуда $x=-7$. Это рѣшеніе является прямымъ отвѣтомъ на вопросъ задачи, потому что задача допускаетъ отрицательныя рѣшенія.

2) (Невозможное рѣшеніе). *Для починки дома нанято нѣсколько плотниковъ и столяровъ, всего 10 человѣкъ. Плотнику платили въ день 60 коп., а столяру 1 рубль. Сколько было нанято плотниковъ, если извѣстно, что всѣмъ рабочимъ заплатили за одинъ день работы 12 руб?*

Обозначивъ число плотниковъ черезъ x и число столяровъ черезъ $10-x$, получимъ уравненіе:

$$60x+100(10-x)=1200.$$

Откуда $x=-5$. Это рѣшеніе показываетъ невозможность вопроса задачи, такъ какъ искомое неизвѣстное, по смыслу должно быть положительнымъ.

§ **143. Значеніе отрицательныхъ рѣшеній.** Отрицательныя рѣшенія важны въ томъ отношеніи, что они, указывая на невозможность вопроса, вмѣстѣ съ тѣмъ даютъ намъ средство опредѣлить, *въ чемъ заключается эта невозможность и какъ надо измѣнить самую задачу, чтобы вопросъ былъ возможенъ.*

Чтобы уяснить себѣ послѣднее правило, разсмотримъ слѣдующее свойство уравненій: *Если данное уравненіе имѣетъ отрицательный корень, то этотъ же корень съ обратнымъ знакомъ удовлетворяетъ другому уравненію, которое получается изъ даннаго уравненія черезъ перемѣну знаковъ при неизвѣстномъ на обратные.*

Положимъ, что уравненіе: $ax = b$ имѣетъ корень отрицательный, т.-е., пусть $x = \frac{b}{a} = -m$. Докажемъ, что если вмѣсто x въ данномъ уравненіи поставимъ: $-x$, то корень для новаго уравненія: $a \cdot (-x) = b$ будетъ $+m$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія: $a \cdot (-x) = b$ имѣемъ: $-x = \frac{b}{a} = -m$. Умноживъ обѣ части послѣдняго равенства на: -1, получимъ: $x = +m$, что и требовалось доказать.

Это свойство уравненій даетъ намъ возможность легко измѣнить самое уравненіе, корень котораго отрицательный, такъ, чтобы ему удовлетворяло найденное рѣшеніе, но только съ положительнымъ знакомъ. Для этого надо въ составленномъ уравненіи вездѣ перемѣнить знаки при неизвѣстномъ на обратные. Такъ, если мы во второй задачѣ (§ 142) перемѣнимъ знаки при x на обратные, то получимъ слѣдующее уравненіе:

$$-60x + 100(10 + x) = 1200 \text{ или } 100(10 + x) - 60x = 1200.$$

Откуда $x = 5$.

Понятно, что новое уравненіе не соотвѣтствуетъ условіямъ данной задачи; но если мы внимательно разсмотримъ полученное уравненіе, то легко опредѣлимъ, какъ надо измѣнить условіе или вопросъ задачи, чтобы полученное положительное рѣшеніе было бы прямымъ отвѣтомъ на вопросъ задачи.

Въ самомъ дѣлѣ, въ уравненіи:

$$100(10 + x) - 60x = 1200$$

x попрежнему обозначаетъ число плотниковъ, а выраженіе $10+x$ число столяровъ. Выраженіе: $60x$ обозначаетъ деньги, заработанныя плотниками, а выраженіе: $100(10 + x)$—деньги, заработанныя столярами. Слѣдовательно, все уравненіе показываетъ, что если отъ денегъ, заработанныхъ столярами, отнять деньги, заработанныя плотниками, то получится 1200 коп. Соотвѣтственно этому измѣненному уравненію задача приметъ слѣдующій видъ: *Для починки дома нанято нѣсколько плотниковъ и столяровъ, при чемъ послѣднихъ на 10 человѣкъ больше, чѣмъ первыхъ. Плотнику платили въ день 60 коп., а столяру 1 рубль. Сколько было плотниковъ, если извѣстно, что столяры за свою работу получали ежедневно на 12 рублей болѣе, чѣмъ плотники?*

Этой задачѣ и будетъ служить прямымъ отвѣтомъ положительное рѣшеніе $x = 5$, т.-е., плотниковъ было 5 человѣкъ.

Примѣры:

1) *Отцу 48 лѣтъ, а сыну 20; черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ старше сына въ 5 разъ?*

$$48 + x = 5(20 + x).$$

Откуда $x = -13$. Задача невозможна. Но если мы въ уравненіи при x перемѣнимъ знаки, то получимъ новое уравненіе:

$$48 - x = 5(20 - x),$$

которое показываетъ, что въ данной задачѣ надо измѣнить вопросъ слѣдующимъ образомъ: *Сколько лѣтъ тому назадъ отецъ былъ старше сына въ 5 разъ?* Тогда получимъ въ отвѣтъ, что 13 лѣтъ тому назадъ отецъ былъ старше сына въ 5 разъ.

2) *Въ бассейнъ, вмѣстимостью въ 32 бочки, проведены 2 трубы; черезъ первую трубу въ часъ вливается 9 бочекъ, а черезъ вторую выливается 13 бочекъ воды. Во сколько часовъ наполнится пустой бассейнъ, если открыть обѣ трубы?*

Пусть бассейнъ наполнится въ x часовъ; тогда изъ условія задачи имѣемъ уравненіе:

$$9x - 13x = 32.$$

Откуда $x = -8$. Задача невозможна. Но если мы въ уравненіи перемѣнимъ знаки при неизвѣстномъ, то получимъ уравненіе:

$$-9x + 13x = 32 \text{ или } 13x - 9x = 32.$$

Это послѣднее уравненіе показываетъ, что въ 8 часовъ бассейнъ не наполнится, а, наоборотъ, опорожнится.

§ **144. Нулевыя рѣшенія.** Если въ формулѣ $x = \frac{b}{a}$, количество b равно нулю, но a не равно нулю, то $x = \frac{0}{a} = 0$. Такое рѣшеніе называется *нулевымъ*.

Нулевое рѣшеніе иногда является прямымъ отвѣтомъ на вопросъ задачи; иногда же, когда по смыслу задачи искомое не должно равняться нулю, оно показываетъ невозможность вопроса задачи. Напримѣръ:

1) *Какое число надо придать къ числителю и знаменателю дроби* $\frac{6}{24}$, *чтобы получить* $\frac{1}{4}$?

Обозначивъ искомое число черезъ x, получимъ уравненіе: $\frac{6+x}{24+x}=\frac{1}{4}$; откуда $x=\frac{0}{3}=0$. Это рѣшеніе показываетъ, что къ числителю и знаменателю дроби $\frac{6}{24}$ *ничего* не надо прибавлять, потому что эта дробь и безъ того равна $\frac{1}{4}$.

2) *Найти дробь, знаменатель которой въ два раза больше числителя, и которая обращается въ* $\frac{2}{5}$, *если къ числителю ея прибавить 6, а къ знаменателю 15.*

Обозначивъ числителя черезъ x и знаменателя черезъ $2x$, получимъ уравненіе: $\frac{x+6}{2x+15}=\frac{2}{5}$; откуда $x=0$. Это рѣшеніе показываетъ невозможность самаго вопроса, потому что такой дроби: $\frac{0}{0\,.\,2}$ быть не можетъ.

§ **145. Безконечныя рѣшенія.** Если въ формулѣ: $x=\frac{b}{a}$ количество a равно нулю, но b не равно нулю, то корнемъ уравненія: $ax=b$ будетъ служить выраженіе: $\frac{b}{0}$. Это выраженіе показываетъ не только невозможность вопроса, но и невозможность самаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, корень: $\frac{b}{0}$ получился изъ уравненія: $0\,.\,x=b$. Подобнаго уравненія быть не можетъ, потому что нельзя представить себѣ такого числа, которое при умноженіи на нуль дастъ въ произведеніи нѣкоторое число b, не равное нулю. Возьмемъ задачу.

Какое число надо придать къ числителю и знаменателю дроби $\frac{3}{8}$, *чтобы получить 1?*

Изъ условія задачи имѣемъ уравненіе: $\frac{3+x}{8+x}=1$. Освободивъ уравненіе отъ дробей, получимъ:

$$3+x=8+x.$$

Очевидно, что это уравненіе невозможно. Какое бы число мы ни поставили вмѣсто x, никогда первая часть не можетъ

равняться второй. Рѣшивъ это уравненіе, получимъ: $x = \frac{8-3}{1-1} = \frac{5}{0}$. Это рѣшеніе показываетъ, что *нѣтъ* такого числа ни положительнаго, ни отрицательнаго, которое обратило бы данную дробь въ 1, если мы придадимъ его къ числителю и знаменателю данной дроби $\frac{3}{8}$.

§ **146. Понятіе о безконечности.** Выраженія вида: $\frac{b}{0}$ сами по себѣ не имѣютъ никакого смысла, но они введены въ алгебру и имѣютъ особое опредѣленное значеніе. Чтобы уяснить себѣ это значеніе, посмотримъ, что сдѣлается съ дробью, если знаменатель ея будетъ уменьшаться. Если въ дроби: $\frac{b}{a}$ количество a будетъ принимать значенія: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ и т. д., то сама дробь $\frac{b}{a}$ обратится въ $10b$, $100b$, $1000b$ и т. д., т.-е., величина ея будетъ возрастать по мѣрѣ уменьшенія знаменателя. И когда знаменатель этой дроби станетъ меньше всякой данной величины, то и величина дроби можетъ превзойти какое угодно большое число. Другими словами, *по мѣрѣ уменьшенія знаменателя величина данной дроби становится все больше и больше, и наконецъ она можетъ стать болѣе всякаго числа, какое только можно вообразить.* Это безконечно большое число называется **безконечностью** и выражается знакомъ ∞.

Слѣдовательно, выраженіе $\frac{b}{0} = \infty$.

Безконечность можетъ быть *положительною* и *отрицательною*, смотря по тому, какіе знаки имѣютъ члены дроби, знаменатель которой безпредѣльно приближается къ нулю. Если знаки у членовъ одинаковые, то дробь, безпредѣльно увеличиваясь, остается всегда положительною, и потому получается $+\infty$. Если же знаки у членовъ разные, то при безпредѣльномъ возрастаніи абсолютной величины дробь будетъ всегда оставаться отрицательною, и потому получится: $-\infty$. Итакъ, выраже[ніе]
$\frac{b}{0} = \pm\infty$.

Изъ этого послѣдняго равенства вытекаетъ, что $0 = \frac{b}{\pm\infty}$. Эта послѣдняя формула обозначаетъ, что если въ дроби при

Рѣшеніе: $\frac{a^3-ax^2}{a-x}=\frac{a(a^2-x^2)}{a-x}=a(a+x)=a(a+a)=2a^2.$

2) Чему равна дробь: $\frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$, если $x=y=2$.

Рѣшеніе:

$$\frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}=\frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)(x+y)}=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}.$$

3) Чему равна дробь: $\frac{3a^2-ab}{9a^2-6ab+b^2}$, если $b=3a$?

Рѣшеніе: $\frac{3a^2-ab}{9a^2-6ab+b^2}=\frac{a(3a-b)}{(3a-b)^2}=\frac{a}{3a-b}=\frac{a}{3a-3a}=\frac{a}{0}=\infty.$

§ **149. Заключеніе.** Итакъ, рѣшенія уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ могутъ быть: *положительныя, отрицательныя, нулевыя, безконечныя и неопредѣленныя.* Послѣднія три рѣшенія называются замѣчательными случаями рѣшенія.

---

§ **150.** Приступимъ теперь къ изслѣдованію нѣкоторыхъ задачъ, помѣщенныхъ въ III главѣ.

1. Задача № 1463. Чтобы изслѣдовать эту задачу, запишемъ ее въ общемъ видѣ: *Въ бассейнъ проведены двѣ трубы; черезъ первую можетъ онъ наполниться въ* m *часовъ, а черезъ вторую въ* n *часовъ. Черезъ сколько часовъ наполнится пустой бассейнъ, если открыть обѣ трубы?*

Обозначивъ искомое число часовъ черезъ x, получимъ уравненіе:

$$\frac{x}{m}+\frac{x}{n}=1.$$

Откуда $x=\frac{mn}{m+n}$.

Полученная формула показываетъ, что данная задача имѣетъ только *положительныя* рѣшенія, которыя всегда удовлетворяютъ вопросу, потому что въ задачѣ нѣтъ никакихъ ограничивающихъ условій.

2. Задача № 1397. *Какое число надо придать къ числителю дроби $\frac{a}{b}$, чтобы получить дробь $\frac{m}{n}$?*

Изъ условія задачи имѣемъ уравненіе: $\frac{a+x}{b}=\frac{m}{n}$; откуда $x=$ $=\frac{bm-an}{n}$. Полученное выраженіе показываетъ, что задача имѣетъ три рѣшенія: положительное, отрицательное и нулевое.

Положительное рѣшеніе будетъ тогда, когда $bm>an$.

Отрицательное будетъ въ томъ случаѣ, если $bm<an$.

Нулевое, — если $bm=an$.

Такъ какъ задача, по смыслу, допускаетъ всѣ эти три рѣшенія, то вопросъ всегда возможенъ.

Посмотримъ, что означаетъ нулевое рѣшеніе этой задачи. Раздѣливъ обѣ части равенства: $an=bm$ на bn, получимъ: $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$. Слѣдовательно, при нулевомъ рѣшеніи данная дробь $\frac{a}{b}$ равняется дроби $\frac{m}{n}$. Если же $\frac{a}{b}$ равняется дроби $\frac{m}{n}$, то отсюда вытекаетъ прямой отвѣтъ, что къ числителю данной дроби не надо прибавлять никакого числа, чтобы получить дробь: $\frac{m}{n}$.

3. Задача № 1466. *Въ бассейнъ проведены двѣ трубы; черезъ первую онъ можетъ наполниться въ p часовъ, а черезъ вторую вся вода можетъ вытечь въ q часовъ. Во сколько времени можетъ наполниться пустой бассейнъ, если открыть обѣ трубы сразу?*

Обозначивъ искомое число черезъ x, получимъ уравненіе: $\frac{x}{p}-\frac{x}{q}=1$; откуда $x=\frac{pq}{q-p}$. Полученное выраженіе для x показываетъ, что задача можетъ имѣть три рѣшенія: положительное, отрицательное и безконечное.

Положительное рѣшеніе будетъ тогда, когда $q>p$. Оно является прямымъ отвѣтомъ на вопросъ задачи.

Отрицательное будетъ, если $q<p$. Оно показываетъ невозможность вопроса, и вмѣстѣ съ тѣмъ показываетъ, что если мы въ уравненіи при неизвѣстномъ перемѣнимъ знаки на обратные, то новому уравненію будетъ удовлетворять то же самое рѣшеніе съ положительнымъ знакомъ; при чемъ это рѣшеніе будетъ служить прямымъ отвѣтомъ на вопросъ задачи, которая получается изъ данной черезъ измѣненіе нѣкоторыхъ условій, соотвѣтственно измѣненію уравненія.

Измѣнивъ знаки при x въ уравненіи: $\frac{x}{p}-\frac{x}{q}=1$, получимъ уравненіе: $\frac{-x}{p}+\frac{x}{q}=1$ или $\frac{x}{q}-\frac{x}{p}=1$. Этому уравненію соотвѣтствуетъ слѣдующая задача:

Въ бассейнъ проведены двѣ трубы; черезъ первую онъ можетъ наполниться въ p часовъ, а черезъ вторую вся вода можетъ вытечь въ q часовъ. Во сколько времени опорожнится полный бассейнъ, если открыть обѣ трубы сразу?

Безконечное рѣшеніе будетъ, если $p=q$. Оно показываетъ, что бассейнъ никогда не можетъ ни наполниться, если онъ будетъ пустой, — ни опорожниться, если онъ будетъ полный. Дѣйствительно, въ этомъ послѣднемъ случаѣ сколько черезъ первую трубу вольется въ бассейнъ, столько же черезъ вторую въ то же время выльется.

4. **Задача № 1398.** *Какое число надо придать къ числителю и знаменателю дроби $\frac{a}{b}$, чтобы получить дробь $\frac{m}{n}$?*

Изъ условія задачи имѣемъ уравненіе: $\frac{a+x}{b+x}=\frac{m}{n}$; откуда $x=\frac{bm-an}{n-m}$. Полученное выраженіе для x показываетъ, что данная задача можетъ имѣть пять рѣшеній: положительное, отрицательное, нулевое, безконечное и неопредѣленное.

Положительное рѣшеніе будетъ тогда, когда $bm>an$ и $n>m$, или $bm<an$ и $n<m$.

Отрицательное рѣшеніе будетъ тогда, когда $bm>an$, но $n<m$, или наоборотъ, когда $bm<an$, но $n>m$.

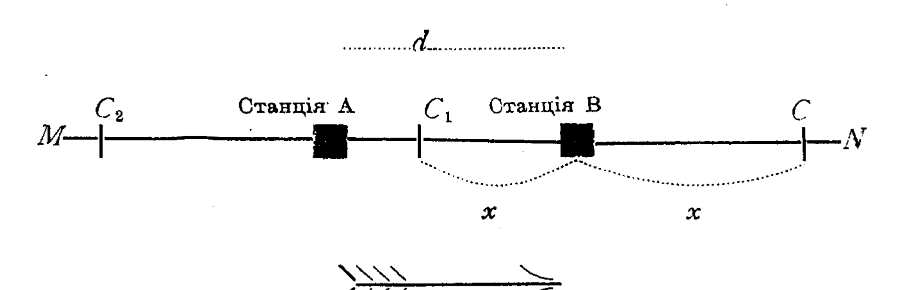
Нулевое рѣшеніе будетъ тогда, когда $bm=an$, но n не равно m.

Всѣ эти три рѣшенія являются прямыми отвѣтами на вопросъ задачи. (О значеніи нулевого рѣшенія см. примѣръ 2).

Безконечное рѣшеніе получается въ томъ случаѣ, если $n = m$, но bm не равно an. Оно означаетъ невозможность вопроса. Дѣйствительно, если $n = m$, то дробь: $\frac{m}{n} = 1$; кромѣ того, если bm не равно an, то дробь: $\frac{a}{b}$ не равна единицѣ. Слѣдовательно, данная задача приводится къ нахожденію такого числа, которое обращаетъ дробь $\frac{a}{b}$ въ единицу, если прибавить его къ числителю и знаменателю дроби, — что невозможно, такъ какъ a не равно b. (См. безконечныя рѣшенія §§ 145, 146, 147).

Неопредѣленное рѣшеніе получается, если $bm = an$ и $n = m$. Оно означаетъ, что всякое число удовлетворяетъ вопросу задачи. Въ самомъ дѣлѣ, если $n = m$ и $bm = an$, то и $b = a$. Слѣдовательно, въ задачѣ требуется найти такое число, которое, если мы придадимъ къ числителю и знаменателю, обращаетъ данную дробь въ единицу. Такъ какъ числитель и знаменатель дроби $\frac{a}{b}$ равны между собою, то очевидно, что всякое число удовлетворяетъ задачѣ.

§ **151. Задача о курьерахъ.** *Два курьера ѣдутъ по направленію прямой MN; первый курьеръ проѣзжаетъ въ часъ v_1 верстъ, а второй v_2 верстъ. Въ извѣстный моментъ первый проѣхалъ мимо станціи A, а второй, спустя m час., проѣхалъ мимо станціи B, лежащей по направленію ихъ движенія за станціей A на разстояніи d верстъ. Опредѣлить, на какомъ разстояніи за станціей B курьеры встрѣтились.*



Предположимъ, что курьеры встрѣтились за станціей B гдѣ-нибудь въ точкѣ C. Обозначимъ разстояніе отъ B до C черезъ x. Тогда первый курьеръ ѣхалъ всего часовъ отъ A до C: $\frac{d+x}{v_1}$, а второй отъ B до C: $\frac{x}{v_2}$. Изъ условія задачи имѣемъ уравненіе:

$$\frac{d+x}{v_1} - \frac{x}{v_2} = m.$$

Рѣшивъ это уравненіе, получимъ:

$$x = \frac{v_2(mv_1 - d)}{v_2 - v_1}.$$

Полученное выраженіе для x показываетъ, что задача можетъ имѣть всѣ пять рѣшеній.

1) *Положительное рѣшеніе* получается тогда, когда $mv_1 > d$ и $v_2 > v_1$, или $mv_1 < d$ и $v_2 < v_1$. Это рѣшеніе показываетъ, что встрѣча состоялась въ точкѣ C, которая лежитъ за станціей B на разстояніи, выраженномъ полученной формулой. Что дѣйствительно эта встрѣча возможна за станціей B, видно изъ самой формулы. Въ самомъ дѣлѣ, произведеніе mv_1 означаетъ пространство, которое проѣхалъ первый курьеръ въ m часовъ. Слѣдовательно, оно показываетъ, на сколько удалился онъ отъ станціи A до того момента, когда второй курьеръ проѣзжалъ мимо станціи B. Если же $mv_1 > d$, то это означаетъ, что первый курьеръ проѣхалъ въ m часовъ больше, чѣмъ разстояніе отъ A до B, и слѣдовательно, въ то время, когда второй курьеръ былъ на станціи B, первый былъ дальше. Условіе же $v_2 > v_1$ показываетъ, что второй курьеръ ѣхалъ скорѣе, чѣмъ первый; слѣдовательно, встрѣча возможна гдѣ-нибудь за станціей B въ точкѣ C.

Точно такъ же, если $mv_1 < d$, то это означаетъ, что первый курьеръ еще не доѣхалъ до станціи B, когда второй былъ уже тамъ. Условіе же $v_2 < v_1$ показываетъ, что первый курьеръ ѣхалъ скорѣе, чѣмъ второй; слѣдовательно, встрѣча возможна гдѣ-нибудь за станціей B въ точкѣ C.

2) *Отрицательное рѣшеніе* можетъ получиться, во-первыхъ, тогда, когда $mv_1 > d$, но $v_2 < v_1$, и, во-вторыхъ, тогда, когда

$mv_1 < d$, но $v_2 > v_1$. Оно показываетъ невозможность вопроса. Но если мы въ уравненіи перемѣнимъ знаки при x на обратные, то найденное рѣшеніе съ положительнымъ знакомъ будетъ удовлетворять новому уравненію.

Перемѣнивъ знаки при x, получимъ уравненіе:

$$\frac{d-x}{v_1}+\frac{x}{v_2}=m.$$

Это уравненіе соотвѣтствуетъ задачѣ, въ которой требуется узнать мѣсто встрѣчи курьеровъ не за станціей B, а *передъ этой станціей.* Точка встрѣчи: C_1 или C_2 при этомъ можетъ лежать или между станціями A и B или передъ станціей A. Въ первомъ случаѣ выраженіе: $\frac{d-x}{v_1}$ означаетъ время, которое употребилъ первый курьеръ на проѣздъ отъ станціи A до встрѣчи въ точкѣ C_1; выраженіе же $\frac{x}{v_2}$ означаетъ время, которое употребилъ второй курьеръ на проѣздъ отъ C_1 до станціи B; и по условію сумма этихъ временъ равна m часамъ.

Во второмъ же случаѣ, когда точка встрѣчи будетъ лежать передъ станціей A, выраженіе: $\frac{d-x}{v_1}$ отрицательное, потому что $x > d$; поэтому, вмѣсто него въ уравненіи: $\frac{d-x}{v_1}+\frac{x}{v_2}=m$ можно поставить: $-\frac{x-d}{v_1}$. Тогда получимъ уравненіе: $-\frac{x-d}{v_1}+\frac{x}{v_2}=m$ или $\frac{x}{v_2}-\frac{x-d}{v_1}=m$.

Въ этомъ послѣднемъ уравненіи выраженіе: $\frac{x}{v_2}$ показываетъ, сколько часовъ употребилъ второй курьеръ на проѣздъ отъ точки встрѣчи до ст. B, а выраженіе: $\frac{x-d}{v_1}$ показываетъ число часовъ, которое употребилъ первый курьеръ на проѣздъ отъ точки встрѣчи до ст. A; и по условію разность этихъ временъ равна m часамъ.

Что курьеры при допущеніи $mv_1 > d$, но $v_2 < v_1$ или $mv_1 < d$, но $v_2 > v_1$ должны встрѣтиться не за станціей B, а передъ

нею, можно доказать еще слѣдующимъ образомъ. Если $mv_1 > d$, то первый курьеръ проѣхалъ уже станцію B, когда второй прибылъ туда; но такъ какъ $v_2 < v_1$, т.-е., второй курьеръ ѣдетъ медленнѣе перваго, то встрѣча не можетъ произойти, потому что первый курьеръ находится впереди. Встрѣча эта произошла гдѣ-нибудь передъ станціей B раньше. Точно такъ же, если $mv_1 < d$, то первый курьеръ не доѣхалъ еще до станціи B, когда второй былъ уже тамъ; но такъ какъ $v_2 > v_1$, т.-е., второй курьеръ ѣдетъ скорѣе перваго, то встрѣча не можетъ произойти, потому что первый курьеръ находится позади. Встрѣча эта произошла гдѣ-нибудь передъ станціей B.

3. *Нулевое рѣшеніе* будетъ тогда, когда $mv_1 = d$, но v_2 не равно v_1. Оно означаетъ, что курьеры встрѣтились на станціи B.

4. *Безконечное рѣшеніе* получается, когда mv_1 не равно d, но $v_2 = v_1$. Оно показываетъ, что встрѣчи не было и не можетъ быть. Въ самомъ дѣлѣ, если первый курьеръ не доѣхалъ до станціи B въ то время, когда второй былъ тамъ, или же переѣхалъ ее, то встрѣчи быть не можетъ, потому что они двигаются съ одинаковой скоростью.

5. *Неопредѣленное рѣшеніе* получается, если $mv_1 = d$ и $v_2 = v_1$. Оно показываетъ, что курьеры въ одно и то же время были на станціи B и двигаются вездѣ съ одинаковой скоростью; слѣдовательно, они постоянно будутъ вмѣстѣ, такъ что каждую точку ихъ пути можно считать за точку встрѣчи.

Б. Два уравненія съ двумя неизвѣстными.

§ 152. Возьмемъ систему двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными въ общемъ видѣ:

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a_1x + b_1y = c_1. \end{cases}$$

Рѣшивъ ихъ, получимъ:

$$x = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}; \qquad y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

При изслѣдованіи этихъ выраженій разсмотримъ два случая: первый случай, когда общій знаменатель: $ab_1 - a_1b$ не равенъ нулю, и второй, когда знаменатель равняется нулю.

§ 153. Первый случай. Въ этомъ случаѣ оба рѣшенія могутъ быть: *или положительными, или отрицательными, или нулевыми;* кромѣ того, одно изъ нихъ можетъ быть положительнымъ, а другое отрицательнымъ, или нулевымъ; наконецъ, одно

можетъ быть отрицательнымъ, а другое нулевымъ. Каждое изъ этихъ рѣшеній имѣетъ такое же значеніе, какое имѣютъ соотвѣтственныя рѣшенія уравненій съ однимъ неизвѣстнымъ. Замѣтимъ при этомъ, что оба нулевыя рѣшенія могутъ получиться тогда, когда извѣстные члены въ уравненіяхъ равны нулю. Это вытекаетъ изъ самихъ уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіяхъ: $ax + by = c$ и $a_1x + b_1y = c_1$ вмѣсто x и y поставимъ нуль, то c и c_1 обращаются въ нуль.

§ **154. Второй случай.** Знаменатель $ab_1 - a_1b$ равенъ нулю.

Въ этомъ случаѣ оба рѣшенія могутъ быть или *безконечными,* или *неопредѣленными.*

Безконечными они бываютъ тогда, когда числитель *одного изъ корней* не равенъ нулю, а *неопредѣленными,* когда числитель *одного изъ корней* равенъ нулю.

Докажемъ сначала, что если одинъ изъ корней принимаетъ видъ: $\frac{0}{0}$, то и другой будетъ имѣть тотъ же видъ, т.-е., надо доказать, что если $x = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b} = \frac{0}{0}$, то $y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} = \frac{0}{0}$.

Если $x = \frac{0}{0}$, то $cb_1 = c_1b$ и $ab_1 = a_1b$. Раздѣливъ первое равенство на второе, получимъ $\frac{c}{a} = \frac{c_1}{a_1}$; откуда $ac_1 = a_1c$. Слѣдовательно, $y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} = \frac{0}{0}$.

Легко теперь доказать, что если одинъ корень будетъ безконечнымъ, то и другой тоже будетъ безконечнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, другой корень можетъ быть или безконечнымъ или неопредѣленнымъ; но неопредѣленнымъ онъ не можетъ быть, потому что тогда и первый, по доказанному выше, долженъ быть неопредѣленнымъ; стало быть, второй корень долженъ быть безконечнымъ.

§ **155.** *Безконечныя рѣшенія* показываютъ не только невозможность вопроса, но и невозможность самой системы уравненій.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы первое изъ данныхъ уравненій умножимъ на b_1, а второе на b, то получимъ:

$$ab_1x + bb_1y = cb_1.$$
$$a_1bx + bb_1y = c_1b.$$

При безконечномъ рѣшеніи $ab_1 = a_1b$, но cb_1 не равно c_1b. Слѣдовательно, первыя части полученныхъ уравненій противорѣчатъ вторымъ. (См. § 136, 2.)

Неопредѣленныя рѣшенія показываютъ, что уравненіямъ и вопросамъ задачи удовлетворяетъ безчисленное множество величинъ. Чтобы убѣдиться въ этомъ, умножимъ первое уравненіе на b_1, а второе на b; получимъ:

$$ab_1x + bb_1y = cb_1.$$
$$a_1bx + bb_1y = c_1b.$$

Но если $x = \frac{0}{0}$, то $ab_1 = a_1b$ и $cb_1 = c_1b$. Слѣдовательно, оба эти уравненія совершенно одинаковы, или представляютъ одно и то же уравненіе. Но намъ уже извѣстно (§ 119), что одно уравненіе съ двумя неизвѣстными имѣетъ безчисленное множество корней. Давая въ этомъ случаѣ x какія угодно значенія, мы можемъ получать соотвѣтственныя значенія для y.

Задачи.

Подставить въ слѣдующія уравненія вмѣсто количествъ: m, n, p и q такія числа, чтобы корни для уравненія получились: положительные, отрицательные, нулевые, безконечные и неопредѣленные:

1743. $mx + n = px + q$. **1744.** $mx - n = px - q$.
1745. $n - mx = px + q$. **1746.** $mx + n = q - px$.

Опредѣлить, при какомъ значеніи количества a корни нижеслѣдующихъ уравненій будутъ: положительными, отрицательными и нулевыми:

1747. $\frac{5x - a}{3} = \frac{4x - 5}{5}$. **1748.** $\frac{7x - a}{3} = \frac{2x + 5}{5}$.

1749. $4 - 3x = \frac{5x - 6a}{4}$. **1750.** $\frac{2x + 5}{10} = \frac{3x - a}{4}$.

Опредѣлить, при какомъ значеніи количествъ: a и b корни будутъ безконечными и неопредѣленными въ слѣдующихъ уравненіяхъ:

1751. $\frac{ax-3}{3}=\frac{x-b}{2}$. **1752.** $\frac{ax+5}{5}=26-x$.

Измѣнить слѣдующія уравненія такъ, чтобы корни ихъ были положительными:

1753. $\frac{x}{3}+7=2$. **1754.** $\frac{x-11}{6}-4=x$.

1755. $\frac{5x}{2}-\frac{7x}{3}-\frac{4x}{4}=5$. **1756.** $\frac{3x+7}{6}+\frac{2x+9}{7}=2$.

1757. $\frac{2x+1}{3}=\frac{4+3x}{4}$. **1758.** $\frac{1-x}{10}+\frac{5x-1}{12}=\frac{3(x-1)}{4}+2$.

1759. $\frac{24-x}{2}-\frac{4-3x}{4}=1$. **1760.** $\frac{13}{12x+18}=\frac{3}{8+12x}$.

1761. $\frac{x-2}{x-5}+\frac{x+5}{x+7}=2$. **1762.** $(1-x)(2+x)=(3+x)(4-x)$.

Опредѣлить истинное значеніе дробей:

1763. $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ при $a=b$. **1764.** $\frac{a^2-1}{a-1}$ при $a=1$.

1765. $\frac{8(a-2)}{a^2-4}$ при $a=2$. **1766.** $\frac{2x^2-8}{5x-10}$ при $x=2$.

1767. $\frac{x-y}{x^2-y^2}$ при $x=y$. **1768.** $\frac{x-1}{5x^2-5}$ при $x=1$.

1769. $\frac{3a^4-6a^2+3}{5(a^2-1)}$ при $a=1$. **1770.** $\frac{a^2-8a+16}{4a-16}$ при $a=4$.

1771. $\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}$ при $a=b$. **1772.** $\frac{a^4-b^4}{a-b}$ при $a=b$.

Изслѣдовать задачи: № **1487—1515** и № **1721—1736**.

ГЛАВА VII.

Неравенства.

§ 56. **Опредѣленія.** *Неравенствомъ называется такая формула, которая показываетъ, что одно количество не равно другому.* Одно изъ количествъ можетъ быть больше или меньше другого; зависимость эта выражается при помощи знаковъ: $>$ или $<$, которые называются *знаками неравенства.* Напр.: $6>5$, $3<9$; $a-b>c-d$ и т. п.

Примѣчаніе. Иногда знакъ неравенства соединяется со знакомъ равенства, напримѣръ: $x \geqq 5$ или $y \leqq 4$. Такое обозначеніе показываетъ, что нѣкоторое количество больше или равно другому, и, наоборотъ, одно количество меньше или равно другому.

Въ неравенствѣ, какъ и въ равенствѣ, выраженіе, стоящее передъ знакомъ неравенства, называется *первою частью* неравенства, а стоящее послѣ знака неравенства, — *второю частью* неравенства.

Всякое неравенство можно разсматривать, какъ равенство, въ которомъ пропущенъ одинъ изъ членовъ, вслѣдствіе чего равенство нарушилось.

§ **157.** Первая часть неравенства считается *больше* второй тогда, когда къ послѣдней надо придать какое-нибудь *положительное* количество, чтобы обратить неравенство въ равенство; и, наоборотъ, первая часть считается *меньше* второй, если къ послѣдней надо придать какое-нибудь *отрицательное* количество, чтобы неравенство обратилось въ равенство. Такъ, въ неравенствѣ: $5>2$ первая часть больше второй потому, что ко второй надо придать 3 положительныхъ единицы, чтобы это неравенство обратилось въ равенство. Точно такъ же въ неравенствѣ: $-7<11$ первая часть меньше второй потому, что ко второй надо придать 18 отрицательныхъ единицъ, чтобы данное неравенство обратилось въ равенство.

На этомъ основаніи считаются:

1) *изъ положительныхъ количествъ то бо́льшимъ, у котораго абсолютная величина больше,* — такъ $6>3$;

2) *всякое положительное количество больше всякаго отрицательнаго,* — такъ: $5>-6$;

3) *изъ отрицательныхъ количествъ то больше, у котораго абсолютная величина меньше,* — такъ: $-4>-15$;

4) *всякое положительное количество больше нуля*;

5) *всякое отрицательное количество меньше нуля.*

Примѣчаніе. Мы должны замѣтить, что выраженіе: „всякое положительное количество больше всякаго отрицательнаго“ есть чисто условное. По самому существу, нельзя считать, что $+4>-5$, или что 4 рубля выигрыша больше 5 рублей проигрыша, такъ какъ эти величины разнородны, а потому не могутъ быть сравниваемы. Однако условились всякую величину положительную считать больше отрицательной, потому что, со-

блюдая это условіе, мы никогда не впадемъ ни въ какую погрѣшность, не встрѣтимъ никакого противорѣчія. То же самое можно сказать и относительно 4 и 5 положеній.

Пояснимъ примѣромъ, почему устоновлено такое условіе. Положимъ, что у одного человѣка есть на 4 рубля имущества, а у другого не только нѣтъ никакого имущества, но еще онъ имѣетъ 5 рублей долга; очевидно, что первый человѣкъ будетъ богаче второго, или имущество перваго человѣка будетъ больше, чѣмъ второго.

Точно такъ же изъ двухъ людей тотъ богаче, который ничего не имѣетъ, чѣмъ тотъ, который имѣетъ долги и т. п.

§ **158.** На основаніи всего вышесказаннаго всѣ числа, какъ положительныя, такъ и отрицательныя, располагаются въ слѣдующемъ безконечномъ ряду:

$$-\infty, \ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \infty,$$

изъ которыхъ каждое тѣмъ больше, чѣмъ дальше оно отодвинуто направо.

Кромѣ того, если желаютъ обозначить, что какое-нибудь количество положительное, то пишутъ: $a > 0$; если же желаютъ обозначить, что оно отрицательно, то пишутъ: $a < 0$.

§ **159. Главныя свойства неравенствъ.** *I. Къ обѣимъ частямъ неравенства можно придать или отнять отъ нихъ поровну, при чемъ неравенство не нарушится.* Напр.:

$$7 > 3 \text{ и } 7 + 4 > 3 + 4; \quad a < b \text{ и } a - c < b - c.$$

Это свойство основывается на той аксіомѣ, что если мы къ неравнымъ величинамъ придадимъ поровну, то получатся неравныя величины, а именно: та изъ нихъ останется бо́льшею, которая была больше.

На основаніи этого свойства вытекаютъ слѣдствія:

1) Въ неравенствѣ, какъ и въ уравненіи, можно переносить члены изъ одной части въ другую, при чемъ нужно перемѣнить знаки у переносимаго члена на обратные.

Такъ, напримѣръ, въ неравенствѣ: $a + 3b < c - 2d$, придавъ къ обѣимъ частямъ по $2d$ и вычтя по a получимъ слѣдующее неравенство: $3b + 2d < c - a$. Сравнивая его съ первымъ, видимъ, что членъ: $2d$ перешелъ изъ второй части въ первую, а членъ: a обратно, при чемъ знаки у нихъ перемѣнились.

2) Можно почленно складывать неравенства одинаковаго смысла; напр.:

$$\text{если } a > b \text{ и } c > d, \text{ то } a + c > b + d.$$

Въ самомъ дѣлѣ, придавъ къ обѣимъ частямъ неравенства: $a > b$ по d, получимъ: $a + d > b + d$. Но если въ первой части полученнаго неравенства d замѣнимъ посредствомъ c, то эта часть увеличится, такъ какъ $c > d$; слѣдовательно, неравенство: $a + c > b + d$ вѣрное.

3) Можно почленно вычитать одно неравенство изъ другого, имѣющаго съ первымъ обратный смыслъ; напр.: если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$ или $c - a < d - b$.

Доказывается эта истина такъ же, какъ и предыдущая.

II. *Обѣ части неравенства можно умножать или дѣлить на какое угодно положительное количество, и неравенство не нарушится.* Напр.: умноживъ или раздѣливъ неравенство: $4 < 6$ на 2, получимъ неравенства: $8 < 12$ и $2 < 3$.

Это свойство вытекаетъ изъ той аксіомы, что если неравныя величины помножимъ или раздѣлимъ на какое-нибудь положительное количество, то получатся неравныя величины, а именно: та изъ нихъ останется бо́льшею, которая была больше.

На этомъ свойствѣ основывается *уничтоженіе дробныхъ членовъ въ неравенствѣ.* Для этого надо привести всѣ дробные члены къ общему знаменателю и отбросить общаго знаменателя, что равносильно умноженію обѣихъ частей неравенства на общаго знаменателя. Напримѣръ, пусть дано намъ неравенство: $\frac{5}{8} + 2\frac{1}{2} > 1\frac{3}{5}$. Общій знаменатель будетъ 40. Приведя всѣ члены къ общему знаменателю, получимъ $\frac{25}{40} + \frac{100}{40} > \frac{64}{40}$; откуда $25 + 100 > 64$.

III. *Если обѣ части неравенства умножимъ, или раздѣлимъ на какое-нибудь отрицательное количество, то надо знакъ неравенства перемѣнить на обратный, т.-е. вмѣсто $>$ надо взять $<$, и наоборотъ.*

Чтобы доказать это послѣднее свойство, возьмемъ неравенство: $a > b$.

Допустимъ, что ко второй части неравенства надо придать какое-то положительное количество x, чтобы неравенство обра-

тилось въ равенство, т.-е. допустимъ, что $a = b + x$. Умножимъ это равенство на какое-нибудь отрицательное количество: m, получимъ:

$$am = bm + mx.$$

Въ этомъ послѣднемъ равенствѣ членъ: mx непремѣнно будетъ отрицательнымъ, потому что онъ представляетъ произведеніе двухъ количествъ: положительнаго x и отрицательнаго m.

Если мы теперь отбросимъ этотъ членъ, то получимъ неравенство, въ которомъ первая часть будетъ меньше второй, такъ какъ къ послѣдней надо придать отрицательное количество: mx, чтобы это неравенство обратилось въ равенство. Слѣдовательно,

$$am < bm.$$

Такимъ же образомъ доказывается, что и при дѣленіи на отрицательное количество знакъ неравенства измѣняется на обратный.

Слѣдствія. 1) Если мы умножимъ неравенство на — 1, то знаки у всѣхъ членовъ измѣнятся на обратные, при чемъ измѣнится и знакъ неравенства. Слѣдовательно, *въ неравенствѣ можно перемѣнять знаки у всѣхъ членовъ на обратные, но при этомъ надо измѣнить и знакъ самаго неравенства.*

2) Нельзя умножать неравенство на буквеннаго множителя, знакъ котораго намъ неизвѣстенъ.

§ 160. **Рѣшеніе неравенствъ.** Неравенства могутъ иногда содержать неизвѣстныя количества. Тогда они, подобно уравненіямъ, раздѣляются на неравенства съ однимъ, двумя и болѣе неизвѣстными. По степени же неизвѣстныхъ неравенства раздѣляются на неравенства первой, второй и т. д. степени. Разсмотримъ рѣшеніе неравенствъ первой степени съ однимъ только неизвѣстнымъ.

Рѣшить неравенство значитъ найти такое количество, которое, будучи подставлено вмѣсто неизвѣстнаго, обращаетъ данное неравенство въ очевидное неравенство. Неравенства рѣшаются точно такъ же, какъ и уравненія, т.-е., надо неравенство: 1) освободить отъ дробей, 2) раскрыть скобки, 3) перенести неизвѣстные члены въ первую часть, а извѣстные во вторую, 4) сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ и 5) раздѣлить обѣ части неравенства на коэффиціентъ при неизвѣстномъ.

Примѣры:

$$\text{I.}\quad \frac{3x-4}{5}-6<\frac{x-6}{3}.$$

Освободимъ отъ дробныхъ членовъ:

$$3(3x-4)-90<5(x-6).$$

Раскроемъ скобки: $9x-12-90<5x-30$.

Перенесемъ члены: $9x-5x<-30+90+12$.

Сдѣлаемъ приведеніе: $4x<72$.

Раздѣлимъ обѣ части на 4, получимъ: $x<18$. Слѣдовательно, данному неравенству удовлетворяетъ всякое число, меньшее 18.

$$\text{II.}\quad \frac{2x-5}{3}<\frac{6x-10}{4}.$$

1) $4(2x-5)<3(6x-10)$.

2) $8x-20<18x-30$.

3) $8x-18x<-30+20$.

4) $-10x<-10$ или $10x>10$.

5) $x>1$. Слѣдовательно, данному неравенству удовлетворяетъ всякое число, большее 1.

§ **161**. Изъ рѣшенія предыдущихъ примѣровъ мы видимъ, что даннымъ неравенствамъ удовлетворяетъ безчисленное множество величинъ; поэтому, *всѣ задачи, для рѣшенія которыхъ мы употребляемъ неравенства, суть задачи неопредѣленныя.*

Не находя опредѣленнаго отвѣта, при рѣшеніи неравенствъ мы получаемъ только предѣлъ, больше или меньше котораго должны быть отыскиваемыя неизвѣстныя. Такъ, въ первомъ нашемъ примѣрѣ высшимъ предѣломъ для неизвѣстнаго служитъ число 18, а во второмъ — низшимъ предѣломъ число 1.

Но иногда одно и то же неизвѣстное входитъ въ нѣсколько неравенствъ. Тогда при рѣшеніи получается не одинъ, а два или нѣсколько предѣловъ для неизвѣстнаго. Положимъ, что неизвѣстное входитъ въ два неравенства; тогда при рѣшеніи этихъ неравенствъ получится два предѣла. При этомъ могутъ быть слѣдующіе случаи:

1. *Оба предѣла могутъ быть одного свойства;* напр.: $x>10$ и $x>3$ или $y<6$ и $y<20$. Въ этомъ случаѣ одинъ предѣлъ содержится въ другомъ, а потому является лишнимъ, не нужнымъ. Такъ, въ первомъ нашемъ примѣрѣ, если неиз-

вѣстное больше 10, то оно и подавно больше 3. Слѣдовательно, второй предѣлъ содержится въ первомъ, а потому является лишнимъ. Точно такъ же, во второмъ примѣрѣ истиннымъ предѣломъ для y будетъ число 6, потому что если неизвѣстное меньше 6, то оно и подавно будетъ меньше 20. Слѣдовательно, въ первомъ примѣрѣ для неизвѣстнаго мы можемъ взять всякое число, большее 10, а во второмъ — всякое число, меньшее 6.

2. *Оба предѣла могутъ быть разныхъ свойствъ;* напр.: $x < 9$ и $x > 5$. Въ этомъ случаѣ число цѣлыхъ рѣшеній бываетъ ограничено. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ цѣлыхъ рѣшеній можетъ быть только три, а именно: x можетъ равняться: 8, 7 и 6.

Но иногда предѣлы разныхъ свойствъ *противорѣчатъ другъ другу*. Положимъ, что при рѣшеніи двухъ неравенствъ мы получили слѣдующіе предѣлы: $x > 10$ и $x < 5$. Очевидно, что если неизвѣстное больше 10, то оно не можетъ быть меньше 5. Противорѣчащіе предѣлы показываютъ, что данныя неравенства несовмѣстны, и вопросъ, изъ котораго получились эти неравенства, невозможенъ.

Примѣры:

$$\text{I.}\quad 7 - x > 37 - 6x \text{ и } 9 - 5x > 36 - 8x.$$

Рѣшивъ эти неравенства получимъ: $x > 6$ и $x > 9$, предѣлы одного свойства; значитъ, всякое число, большее 9, удовлетворяетъ даннымъ неравенствамъ.

$$\text{II.}\quad 2x - 5 < 11 \text{ и } 9x > 40 - x.$$

Рѣшивъ эти неравенства, найдемъ $x < 8$ и $x > 4$. Даннымъ неравенствамъ удовлетворяютъ всѣ числа, заключающіяся между 8 и 4. Цѣлыхъ рѣшеній три: $x = 7$, 6 и 5.

$$\text{III.}\quad 9 + 3x < 10 + 2x \text{ и } 24 - 7x < 3.$$

Рѣшенія суть: $x < 1$ и $x > 3$. Получились противорѣчащіе предѣлы; слѣдовательно, данныя неравенства несовмѣстны.

§ **162. Составленіе неравенствъ.** При помощи неравенствъ рѣшается много задачъ. Для этого изъ условій задачи составляютъ неравенства такимъ же образомъ, какъ и уравненія; затѣмъ рѣшаются неравенства.

Примѣры:

1. *Если искомое число раздѣлимъ на 3 и къ полученному частному придадимъ 4, то сумма будетъ меньше утроеннаго неизвѣстнаго числа, уменьшеннаго на 100. Найти это число.*

Обозначивъ искомое число черезъ x, получимъ неравенство:

$$\frac{x}{3}+4<3x-100.$$

Откуда $x>39$, т.-е. всякое число, большее 39, удовлетворяетъ вопросу.

2. *Если путешественникъ будетъ проѣзжать въ день на 12 верстъ менѣе того, что онъ проѣзжаетъ, то въ 6 дней онъ успѣетъ сдѣлать болѣе 840 верстъ. Если же онъ станетъ проѣзжать на 15 верстъ болѣе, то въ 4 дня онъ не успѣетъ проѣхать 840 верстъ. Сколько верстъ проѣзжаетъ онъ въ день?*

Обозначивъ искомое число черезъ x, получимъ неравенства:

$$6(x-12)>840 \text{ и } 4(x+15)<840.$$

Откуда $x>152$ и $x<195$., т.-е. путешественникъ проѣзжаетъ больше 152 верстъ и меньше 195. Цѣлыхъ рѣшеній 42.

§ **163**. Мы уже видѣли, что задачи, для рѣшенія которыхъ употребляютъ неравенства, имѣютъ безчисленное множество рѣшеній, т.-е. онѣ неопредѣленны. Однако, если знакъ неравенства соединяется со знакомъ равенства, то изъ двухъ неравенствъ можетъ получиться одно только опредѣленное рѣшеніе. Напримѣръ. — *Я задумалъ число. Если его увеличить въ пять разъ и затѣмъ придать 10, то сумма будетъ не болѣе 85; если же его уменьшить въ 5 разъ и изъ пятой части вычесть 2, то разность получится не менѣе 1. Какое число я задумалъ?*

Изъ условія задачи имѣемъ неравенства:

$$5x+10\leqq 85 \text{ и } \frac{x}{5}-2\geqq 1.$$

Откуда $x\leqq 15$ и $x\geqq 15$. Слѣдовательно, этой задачѣ удовлетворяетъ одно только рѣшеніе.

Задачи.

Рѣшить неравенства:

1773. $x+5>7$.
1774. $x-8>3$.
1775. $27x+11<95$.
1776. $5x+6<2x$.
1777. $42+24x>39x-168$.
1778. $3(x+1)>5(x-1)$.
1779. $\frac{2x}{3}-1<\frac{x}{12}+1\frac{1}{3}$.
1780. $\frac{2x+1}{2}>\frac{7x+5}{8}$.
1781. $\frac{5x-11}{4}-\frac{x-1}{10}>\frac{11x-1}{12}$.
1782. $\frac{x+3}{2}-1<\frac{x+5}{3}$.
1783. $\frac{3x}{5}-\frac{x-2}{6}<x$.
1784. $\frac{x+5}{6}+\frac{x-6}{5}<\frac{22x}{30}$.

Найти цѣлыя рѣшенія для слѣдующихъ неравенствъ:

1785. $\begin{cases}3x-15>13\\2x+12<38.\end{cases}$

1786. $\begin{cases}\frac{x}{2}-1<\frac{x}{4}+\frac{x}{5}.\\\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}>\frac{1}{2}.\end{cases}$

1787. $\begin{cases}\frac{5-x}{8}<\frac{11-3x}{23}.\\\frac{17-3x}{4}-1>\frac{3x-1}{3}.\end{cases}$

1788. $\begin{cases}\frac{12x-8}{6}-\frac{18-4x}{3}>x+2.\\\frac{x}{3}+\frac{x-1}{5}<\frac{2x+15}{9}.\end{cases}$

1789. $\begin{cases}\frac{x-3}{4}-\frac{x-4}{3}<\frac{x-5}{2}+\frac{x-1}{8}.\\\frac{5x-1}{2}-\frac{7x-2}{10}>6{,}6-\frac{x}{2}.\end{cases}$

1790. $\begin{cases}\frac{5+8x}{6}>\frac{45-8x}{5}.\\\frac{3x}{5}+\frac{2x}{4}<5.\end{cases}$

Найти цѣлыя числа, которыя, будучи поставлены вмѣсто a, обращають слѣдующія дроби въ количества положительныя:

1791. $\frac{8a-15}{3}$.
1792. $\frac{5-3a}{4}$.
1793. $\frac{4-3a}{2a+15}$.
1794. $\frac{6a-4}{3a+2}$.
1795. $\frac{5a-2}{3-4a}$.
1796. $\frac{3-4a}{4-3a}$.

1797. Если къ искомому удвоенному числу придадимъ 6 то полученная сумма будетъ болѣе разности, которая получится когда мы отъ учетвереннаго искомаго числа отнимемъ 124. Найти это число.

1798. Найти дробь, числитель которой на 12 меньше знаменателя. Если прибавить къ числителю и знаменателю по 3, то знаменатель будетъ превышать числителя болѣе, чѣмъ въ 3 раза.

1799. Найти дробь, числитель которой на 48 меньше знаменателя. Если къ числителю и знаменателю придать по 24, то знаменатель будетъ превышать числителя болѣе, чѣмъ въ два раза; если же отъ числителя и знаменателя отнять по 6, то знаменатель будетъ превышать числителя менѣе, чѣмъ въ 8 разъ.

1800. Если пароходъ станетъ проѣзжать въ часъ 5 верстами болѣе того, что онъ проѣзжаетъ, то въ 10 часовъ онъ успѣетъ сдѣлать болѣе 200 верстъ; если же онъ станетъ проѣзжать на 3 версты менѣе, то въ 20 часовъ онъ не успѣетъ проѣхать 200 верстъ. Сколько верстъ проѣзжаетъ пароходъ въ часъ?

1801. Когда дробь увеличивается, если прибавлять къ ея числителю и знаменателю поровну, и когда она уменьшается?

1802. Доказать, что если сложить какую-нибудь дробь съ ея обращенной, то сумма будетъ больше 2.

ГЛАВА VIII.

Неопредѣленныя уравненія.

§ **164.** Мы уже видѣли, что если число уравненій меньше числа неизвѣстныхъ, то существуетъ для нихъ неопредѣленное число рѣшеній, вслѣдствіе чего эти уравненія называются неопредѣленными. По числу неизвѣстныхъ неопредѣленныя уравненія раздѣляются на такія, въ которыхъ *число неизвѣстныхъ однимъ больше, чѣмъ число уравненій — двумя, тремя и т. д.*

Простѣйшее изъ неопредѣленныхъ уравненій есть одно уравненіе съ двумя неизвѣстными. Общій видъ такого уравненія есть слѣдующій:

$$ax + by = c,$$

гдѣ подъ a, b и c надо подразумѣвать цѣлыя числа. Очевидно, что это уравненіе имѣетъ безчисленное множество рѣшеній. Въ самомъ дѣлѣ, изъ этого уравненія мы получаемъ:

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Теперь, если станемъ давать произвольныя значенія y, то получимъ соотвѣтствующія значенія для x, а именно:

$$\text{если } y=0, \quad \text{то} \quad x=\frac{c}{a};$$

$$\text{,,} \quad y=1, \quad \text{,,} \quad x=\frac{c-b}{a};$$

$$\text{,,} \quad y=-5, \text{,,} \quad x=\frac{c+5b}{a} \text{ и т. п.}$$

§ **165.** Хотя неопредѣленныя уравненія имѣютъ безчисленное множество рѣшеній, но обыкновенно число ихъ ограничиваютъ слѣдующими двумя условіями:

1) *Неизвѣстныя должны быть цѣлыми числами*, при чемъ въ числѣ цѣлыхъ чиселъ считается и нуль.

2) *Неизвѣстныя должны быть положительными числами.*

§ **166.** Прежде, чѣмъ приступить къ выводу правила нахожденія цѣлыхъ рѣшеній, замѣтимъ, что не всякое уравненіе имѣетъ цѣлыя рѣшенія, а именно:

1) *Если коэффиціенты при неизвѣстныхъ суть цѣлыя числа, а извѣстное дробь, то такое уравненіе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній.* Напримѣръ, уравненіе:

$$5x + 7y = 8\tfrac{3}{4}$$

не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній, потому что, по условію, $5x$ и $7y$ суть цѣлыя числа, но сумма цѣлыхъ чиселъ не можетъ равняться дроби. Слѣдовательно, по крайней мѣрѣ, хотя одно изъ этихъ неизвѣстныхъ должно быть дробью.

2) На этомъ основаніи, *если въ уравненіи коэффиціенты при неизвѣстныхъ имѣютъ общаго дѣлителя, на котораго извѣстный членъ не дѣлится, то данное уравненіе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній,* потому что, раздѣливъ всѣ члены уравненія на этого общаго для коэф. дѣлителя, получимъ дробный извѣстный членъ. Напр., уравненіе: $6x + 8y = 9$ не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній, потому что, раздѣливъ всѣ члены на 2, получимъ уравненіе:

$$3x + 4y = 4\tfrac{1}{2},$$

которое не можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ.

Изъ сказаннаго видно, что *коэффиціенты при неизвѣстныхъ* должны быть числами *взаимно простыми.*

§ **167. Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій.** *Рѣшить неопредѣленное уравненіе въ цѣлыхъ числахъ значитъ составить для неизвѣстныхъ такія формулы, по которымъ легко опредѣляются всевозможные цѣлые корни даннаго уравненія.* Такъ, для уравненія:

$$3x - 7y = 17$$

мы, по указаннымъ ниже (§ 168) правиламъ, можемъ составить слѣдующія формулы:

$$x = 7t + 1 \text{ и } y = 3t - 2.$$

Если въ этихъ формулахъ вмѣсто t станемъ подставлять какія угодно цѣлыя числа, то получатся для x и y цѣлыя количества, которыя будутъ удовлетворять данному уравненію. Въ самомъ дѣлѣ,

если $t = 0$, то $x = 1$, а $y = -2$;
„ $t = 1$, „ $x = 8$, „ $y = 1$;
„ $t = 2$, „ $x = 15$, „ $y = 4$;
„ $t = -1$, „ $x = -6$, „ $y = -5$ и т. п.

Каждое изъ полученныхъ такимъ образомъ количествъ обращаетъ данное уравненіе въ тождество.

Укажемъ, какимъ образомъ составляются подобныя формулы.

§ **168.** Если въ уравненіи при одномъ изъ неизвѣстныхъ коэффиц. служитъ единица, то такія уравненія рѣшаются очень просто. Положимъ, что мы имѣемъ уравненіе:

$$5x + y = 42.$$

Перенеся $5x$ во вторую часть уравненія, получимъ:

$$y = 42 - 5x.$$

Послѣдняя формула и представляетъ рѣшеніе для даннаго уравненія, потому что, придавая какія угодно цѣлыя значенія x, мы получимъ соотвѣтствующія цѣлыя значенія для y. Такъ, если $x = 5$, то $y = 42 - 25 = 17$; если $x = -4$, то $y = 42 - (-20) = 62$ и т. п.

Возьмемъ теперь такое уравненіе, въ которомъ коэффиціенты не равны единицѣ; положимъ:

$$3x - 7y = 17.$$

Чтобы рѣшить его, опредѣлимъ сначала неизвѣстное, имѣющее меньшій коэффиц., относительно другого неизвѣстнаго получимъ:

$$x = \frac{17 + 7y}{3} = \frac{17}{3} + \frac{7y}{3}.$$

Исключивъ изъ неправильныхъ дробей цѣлыя числа, получимъ:

$$x = 5 + 2y + \frac{2 + y}{3}.$$

Очевидно, если x и y, по условію, должны быть цѣлыми числами, то и выраженіе: $\frac{2 + y}{3}$ тоже должно быть цѣлымъ числомъ.

Разумѣя подъ t цѣлое число, допустимъ, что

$$\frac{2 + y}{3} = t \ldots (1).$$

Тогда $x = 5 + 2y + t \ldots (2)$.

Освободивъ уравненіе (1) отъ знаменателя, получимъ: $2 + y = 3t$, т.-е., получимъ новое неопредѣленное уравненіе съ двумя неизвѣстными, но у котораго коэффиц. при одномъ изъ неизвѣстныхъ служитъ единица. Изъ этого послѣдняго уравненія имѣемъ:

$$y = 3t - 2.$$

Подставивъ въ уравненіе (2) вмѣсто y его величину, получимъ:

$$x = 5 + 2(3t - 2) + t = 7t + 1.$$

Возьмемъ второй примѣръ:

$$8x + 13y = 55.$$

Чтобы найти цѣлыя рѣшенія, опредѣлимъ x.

$$x = \frac{55 - 13y}{8} = 6 - y + \frac{7 - 5y}{8}.$$

Полагая $\frac{7 - 5y}{8} = t$, имѣемъ $x = 6 - y + t \ldots (1)$.

Освободивъ уравненіе: $\frac{7-5y}{8}=t$ отъ дробей, получимъ $7-5y=8t$. Откуда $y=\frac{7-8t}{5}=1-t+\frac{2-3t}{5}$.

Полагая $\frac{2-3t}{5}=t_1$, имѣемъ $y=1-t+t_1\ldots(2)$.

Освободивъ уравненіе: $\frac{2-3t}{5}=t_1$ отъ знаменателя, получимъ: $2-3t=5t_1$. Откуда $t=\frac{2-5t_1}{5}=-t_1+\frac{2-2t_1}{3}$.

Полагая $\frac{2-2t_1}{3}=t_2$, имѣемъ $t=-t_1+t_2\ldots(3)$.

Освободивъ уравненіе: $\frac{2-2t_1}{3}=t_2$ отъ знаменателя, получимъ $2-2t_1=3t_2$. Откуда $t_1=\frac{2-3t_2}{2}=1-t_2-\frac{t_2}{2}$.

Полагая $\frac{t_2}{2}=t_3$, имѣемъ $t_1=1-t_2-t_3\ldots(4)$. Изъ уравненія $\frac{t_2}{2}=t_3$ имѣемъ $t_2=2t_3\ldots(5)$.

Въ этомъ послѣднемъ уравненіи t_3 можно придавать произвольныя цѣлыя значенія, и соотвѣтственно этому получатся цѣлыя значенія для x и y.

Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ въ уравненіе (4) вмѣсто t_2 его величину $2t_3$, получимъ:

$$t_1=1-2t_3-t_3=1-3t_3.$$

Подставивъ въ уравненіе (3) вмѣсто t_1 и t_2 ихъ величины относительно t_3, получимъ:

$$t=-(1-3t_3)+2t_3=-1+3t_3+2t_3=5t_3-1.$$

Подставивъ въ уравненіе (2) вмѣсто t и t_1, ихъ величины, получимъ:

$$y=1-(5t_3-1)+(1-3t_3)=3-8t_3.$$

Наконецъ, изъ уравненія (1) находимъ, что:

$$x=6-(3-8t_3)+(5t_3-1)=2+13t_3.$$

Формулы: $x=2+13t_3$ и $y=3-8t_3$ и представляютъ общія рѣшенія для даннаго уравненія: $8x+13y=55$.

§ **169**. Изъ предыдущихъ примѣровъ мы видимъ, что сущность рѣшенія неопредѣленнаго уравненія состоитъ въ томъ, что данное уравненіе приводится къ другому, у котораго коэффиціенты меньше; второе приводится къ третьему, у котораго коэф. еще меньше . . . и т. д. до тѣхъ поръ, пока не получимъ уравненія, у котораго одинъ изъ коэффиц. равенъ 1. Это послѣднее уравненіе рѣшается непосредственно. Затѣмъ при помощи послѣдовательныхъ подстановокъ находятся формулы для x и y.

Легко видѣть, что, поступая по указаннымъ правиламъ, мы всегда получимъ такое уравненіе, въ которомъ одинъ изъ коэф. будетъ равенъ 1. Въ самомъ дѣлѣ, коэффиціенты послѣдовательныхъ уравненій получаются такимъ образомъ: *большій коэфф. дѣлится на меньшій, и полученный остатокъ становится коэфф. второго уравненія при вспомогательномъ неизвѣстномъ; затѣмъ меньшій коэффиц. дѣлится на остатокъ; принимаемый за коэфф. второго уравненія при вспомогательномъ неизвѣстномъ, и новый остатокъ принимается за коэффиц. въ третьемъ уравненіи; первый остатокъ дѣлится на второй, второй на третій и т. д., и каждый остатокъ принимается за коэф. въ слѣдующемъ уравненіи.* Значитъ, при рѣшеніи неопредѣленныхъ уравненій мы прибѣгаемъ къ такому ряду послѣдовательныхъ дѣленій коэффиц., какой употребляется при нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя. Но такъ какъ коэффиц. при x и y суть числа взаимно простыя, то непремѣнно дойдемъ до остатка, равнаго **1**, т.-е., непремѣнно получимъ уравненіе, въ которомъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ коэф. будетъ 1. Это показываетъ, что всякое уравненіе вида: $\boldsymbol{ax + by = c}$, *въ которомъ* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *суть числа взаимно простыя, имѣетъ цѣлыя рѣшенія.*

§ **170**. **Упрощенія.** При рѣшеніи неопредѣленныхъ уравненій весьма выгодно пользоваться нѣкоторыми упрощеніями, которыя иногда возможны. Покажемъ важнѣйшія изъ нихъ.

1. Возьмемъ уравненіе: $7x - 13y = 40$. Рѣшая его, получимъ:

$$x = 5 + y + \frac{5 + 6y}{7}.$$

Это послѣднее выраженіе можно упростить слѣдующимъ образомъ: дѣля $13y$ на 7, мы возьмемъ частнымъ не y, а $2y$; тогда въ остаткѣ у насъ получится не $6y$, а: $-y$; слѣдовательно, x будетъ равно $5 + 2y + \dfrac{5 - y}{7}$.

Очевидно, что выраженіе: $\frac{5-y}{7}$ гораздо проще, чѣмъ выраженіе: $\frac{5+6y}{7}$.

Полагая, что $\frac{5-y}{7}=t$, получимъ:

$$y=5-7t;\ x=5+2(5-7t)+t=15-13t.$$

Отсюда мы можемъ вывести **правило:** *если во время рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій при послѣдовательномъ дѣленіи въ остаткѣ получится коэффиц. неизвѣстнаго больше половины дѣлителя, то нужно коэфф. въ частномъ увеличить на 1 и взять отрицательный остатокъ.*

2. Положимъ, что намъ дано уравненіе: $17x-12y=18$, въ которомъ коэфф. при y и извѣстный членъ имѣютъ общаго дѣлителя 6. Раздѣливъ все уравненіе на этого дѣлителя, получимъ: $\frac{17x}{6}-2y=3$. Очевидно, что выраженіе: $\frac{17x}{6}$ есть цѣлое количество, потому что $2y$ и 3 суть цѣлыя числа. Но такъ какъ 17 и 6 числа взаимно простыя, то x должно дѣлиться на 6 безъ остатка. Пусть $\frac{x}{6}=x_1$. Тогда, подставивъ въ данное уравненіе, вмѣсто $\frac{x}{6}$ его величину x_1, получимъ уравненіе: $17x_1-2y=3$ которое гораздо проще даннаго уравненія. Рѣшивъ его, найдемъ, что $x_1=2t+1$, а $y=17t+7$. Слѣдовательно, $x=6x_1=$ $=6(2t+1)=12t+6$.

Изъ этого мы можемъ вывести слѣдующее **правило:** *если коэффиціенты при неизвѣстныхъ имѣютъ общихъ дѣлителей съ извѣстнымъ членомъ, то данное уравненіе полезно раздѣлить на этого дѣлителя.*

3. Возьмемъ уравненіе: $9x-13y=31$. Рѣшая его, получимъ:

$$x=\frac{31+13y}{9}=3+y+\frac{4+4y}{9}.$$

Поступая по вышеуказаннымъ правиламъ, мы должны принять, что $\frac{4+4y}{9}=t$; но дѣйствіе значительно упрощается,

если мы вынесемъ въ числителѣ 4 за скобки, и примемъ, что $\frac{1+y}{9}=t$. Такъ мы можемъ поступить на томъ основанiи, что выраженiе: $\frac{4(1+y)}{9}$ есть по условiю цѣлое количество; но 4 и 9 числа взаимно простыя; поэтому: $1+y$ должно дѣлиться безъ остатка на 9.

Изъ выраженiя: $\frac{1+y}{9}=t$ находимъ, что $y=9t-1$, а $x=3+y+4t=3+(9t-1)+4t=13t+2$.

§ **171. Сокращенный способъ нахожденiя цѣлыхъ рѣшенiй.** Указанный нами выше способъ нахожденiя цѣлыхъ рѣшенiй называется *общимъ*. Этотъ способъ слишкомъ сложенъ; поэтому на практикѣ при рѣшенiи неопредѣленныхъ уравненiй пользуются другимъ, такъ назыв. *сокращеннымъ способомъ*, который даетъ намъ возможность сразу писать формулы цѣлыхъ рѣшенiй для неопр. уравн. Чтобы ознакомиться съ этимъ способомъ, возьмемъ уравненiе: $4x+5y=0$, въ которомъ извѣстный членъ равенъ нулю. Изъ этого уравненiя имѣемъ: $x=\frac{-5y}{4}$. Такъ какъ 5 и 4 числа взаимно простыя, то, слѣдовательно, $\frac{y}{4}$ есть цѣлое количество. Положивъ, что $\frac{y}{4}=t$, получимъ:

$$y=4t, \text{ а } x=-5t.$$

Сравнивая полученныя рѣшенiя съ даннымъ уравненiемъ, легко замѣтить, что x равно *какому угодно цѣлому количеству, помноженному на коэффиц. при* y, а y равно *тому же количеству, помноженному на коэффиц. при* x; при этомъ *знакъ* у одного изъ коэффицiентовъ перемѣняется на *обратный*. Въ нашемъ примѣрѣ взятъ съ обратнымъ знакомъ коэффиц. при y, но можно взять обратно; тогда $x=5t$, а $y=-4t$.

Примѣры:

1) $3x+7y=0$. $x=7t$; $y=-3t$ или $x=-7t$; $y=3t$.

2) $8x-9y=0$. $x=9t$; $y=8t$ или $x=-9t$; $y=-8t$.

3) $ax+by=0$. $x=\pm bt$; $y=\mp at$.

§ **172.** Возьмемъ теперь уравненіе въ общемъ видѣ: $ax + by = c$. Допустимъ, что данному уравненію удовлетворяютъ два цѣлыхъ числа: m и n; такъ что $x = m$ и $y = n$. Подставивъ въ данное уравненіе вмѣсто x и y ихъ величины, получимъ тождество: $am + bn = c$.

Вычтя это равенство изъ даннаго уравненія, получимъ,

$$a(x - m) + b(y - n) = 0.$$

Положивъ, что $x - m = x_1$ и $y - n = y_1$, найдемъ: $ax_1 + by_1 = 0$, т.-е., найдемъ такое неопредѣленное уравненіе, въ которомъ извѣстный членъ равенъ нулю. Общее же рѣшеніе для этого уравненія (на основ. предыдущ. §) есть слѣдующее: $x_1 = \pm bt$; $y_1 = \mp at$.

Но $x_1 = x - m$ и $y_1 = y - n$; слѣдовательно:

$$x - m = \pm bt; \; y - n = \mp at.$$

Откуда $x = m + bt$; $y = n - at$ или
$x = m - bt$; $y = n + at$.

Полученныя формулы и представляютъ общія рѣшенія для уравненія: $ax + by = c$.

Легко замѣтить, какъ эти формулы составляются: m и n суть цѣлыя частныя значенія для даннаго уравненія; выраженія же: bt и at представляютъ произведенія произвольнаго числа на коэффиц. при неизвѣстныхъ. Слѣдовательно, чтобы составить общее рѣшеніе для какого-либо неопр. уравн., *надо сперва найти какимъ-либо способомъ одну пару корней для уравн.; затѣмъ къ этимъ корнямъ надо придать произведеніе произвольнаго цѣлаго числа на коэффиц. при другомъ неизвѣстномъ, при чемъ одинъ изъ коэффиц. берется съ обратнымъ знакомъ.*

Примѣры:

1) $3x + 4y = 85$. Данное уравненіе обращается въ тождество, если $x = 3$, а $y = 19$. Слѣдовательно,

$$\begin{cases} x = 3 + 4t, \\ y = 19 - 3t \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 3 - 4t, \\ y = 19 + 3t. \end{cases}$$

2) $7x - 5y = 8$. Частные корни даннаго уравненія суть: $x = -1$, $y = -3$. Слѣдовательно:

$$\begin{cases} x = -1 + 5t, \\ y = -3 + 7t \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -1 - 5t, \\ y = -3 - 7t. \end{cases}$$

я,

3) $9x - 16y = 27$. Данное уравненіе имѣетъ корни: $x = 3$, $y = 0$. Общее рѣшеніе будетъ:

$$\begin{cases} x = 3 + 16t, \\ y = 9t \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 3 - 16t, \\ y = \quad - 9t. \end{cases}$$

Примѣчаніе. Такимъ образомъ, мы видимъ, что для составленія общихъ рѣшеній сначала надо найти частныя значенія для неизвѣстныхъ. Эти частныя значенія иногда можно найти догадкой; вообще же можно найти ихъ при помощи подстановокъ въ формулу:

$$x = \frac{c - by}{a}$$

вмѣсто y ряда послѣдовательныхъ чиселъ. Такъ, если мы имѣемъ уравненіе: $5x + 8y = 17$, то изъ него получаемъ

$$x = \frac{17 - 8y}{5}.$$

Подставивъ 0 вмѣсто y, получимъ: $x = \frac{17}{5}$,

„ 1 „ y, „ $x = \frac{9}{5}$,

„ -1 „ y, „ $x = \frac{25}{5} = 5$.

Слѣдовательно, $x = 5 + 8t$, $y = -1 - 5t$.

§ **173. Нахожденіе положительныхъ рѣшеній.** До сихъ поръ мы отыскивали для неопредѣленныхъ уравненій только цѣлыя рѣшенія. Но большею частью, рѣшая эти уравненія, ищутъ не только цѣлые, но и положительные корни, чѣмъ еще болѣе ограничивается число рѣшеній. Покажемъ, какъ это дѣлается.

1) Возьмемъ уравненіе: $3x + 4y = 25$. Рѣшивъ его, получимъ: $x = 3 + 4t$; $y = 4 - 3t$. Но, по условію, x и y должны быть положительными числами; слѣдовательно, выраженія: $3 + 4t$ и $4 - 3t$ должны быть больше нуля.

Изъ этого мы видимъ, что произвольное количество t не только должно быть цѣлымъ числомъ, но и удовлетворять слѣдующимъ неравенствамъ:

$$3 + 4t > 0 \text{ и } 4 - 3t > 0.$$

Изъ этихъ неравенствъ находимъ предѣлы для t:

$$t > -\frac{3}{4} \text{ и } t < 1\tfrac{1}{3}.$$

Эти предѣлы показываютъ, что t можетъ равняться 0 и 1; слѣдовательно, данное уравненіе имѣетъ только два цѣлыхъ положительныхъ рѣшенія, а именно: если $t = 0$, то $x = 3$ и $y = 4$; если $t = 1$, то $x = 7$ и $y = 1$.

2) Изъ уравненія $4x - 3y = 5$ находимъ:

$$x = 2 + 3t,\ y = 1 + 4t.$$

Откуда $t > -\frac{2}{3}$ и $t = > -\frac{1}{4}$, т.-е., t можетъ равняться 0, 1, 2, 3 . . . и т. д.; слѣдовательно, данное уравненіе имѣетъ безчисленное множество цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

3) Рѣшая уравненіе $5x + 3y = 2$, получимъ:

$$x = -2 + 3t,\ y = 4 - 5t.$$

Откуда $t > \frac{2}{3}$ и $t < \frac{4}{5}$. Полученные предѣлы показываютъ, что данное уравненіе совсѣмъ не имѣетъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

Вообще, при нахожденіи цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній количество t можетъ имѣть:

1) *Предѣлы одного свойства,* напр.: $t > 3$, $t > 5$, или $t < 2$ и $t < 0$. Такіе предѣлы показываютъ, что уравненіе имѣетъ безчисленное множество цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній (см. прим. 2).

2) *Предѣлы могутъ быть разныхъ свойствъ*, напр.: $t > -\frac{3}{4}$ и $t < 1\frac{1}{3}$ или $t > \frac{2}{3}$ и $t < \frac{4}{5}$. Такіе предѣлы показываютъ, что уравненіе имѣетъ ограниченное число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, или совсѣмъ ихъ не имѣетъ. (См. примѣры: 1 и 3).

3) Наконецъ, *предѣлы могутъ противорѣчить другъ другу,* напр.: $t > 3$ и $t < 1$. Такіе предѣлы показываютъ, что уравненіе вовсе не имѣетъ положительныхъ рѣшеній: ни цѣлыхъ, ни дробныхъ. Напримѣръ:

$$2x + 3y = -35.$$

Рѣшивъ это уравненіе, получимъ:

$$x = -10 + 3t,\ y = -5 - 2t.$$

Откуда $t > 3\frac{1}{3}$ и $t < -2\frac{1}{2}$.

Дѣйствительно, данное уравненіе не можетъ имѣть положительныхъ рѣшеній, потому что извѣстный членъ его отрицательный; сумма же положительныхъ количествъ не можетъ равняться отрицательному.

§ **174.** Если намъ дано неопредѣленное уравненіе, то, не рѣшая его, можно сказать, имѣетъ ли оно безчисленное множество цѣлыхъ полож. рѣшеній, или ограниченное число ихъ, или, наконецъ, совсѣмъ ихъ нѣтъ.

1) Уравненіе вида: $ax - by = c$, въ которомъ a, b, и c суть цѣлыя положительныя количества, имѣетъ безчисленное множество цѣлыхъ полож. рѣшеній, потому что оно представляетъ разность двухъ положительныхъ количествъ, которая можетъ оставаться постоянною, хотя количества: x и y будутъ увеличиваться неопредѣленно.

2) Уравненіе же вида: $ax + by = c$ имѣетъ ограниченное число положит. рѣшеній, потому что оно представляетъ сумму двухъ положительныхъ количествъ, а сумма положительныхъ количествъ не можетъ оставаться постоянною, если оба эти количества или одно изъ нихъ будетъ неопредѣленно увеличиваться. Дѣйствительно, выше мы видѣли, что такія уравненія имѣютъ или нѣсколько рѣшеній, или одно, или даже совсѣмъ не имѣютъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Обыкновенно такія уравненія совсѣмъ не имѣютъ цѣл. полож. рѣшеній тогда, когда сумма коэффиц. при неизвѣстныхъ больше извѣстнаго члена, т.-е., когда $a + b > c$, потому что при послѣднемъ условіи каждое изъ неизвѣстныхъ не можетъ равняться самому малому цѣлому полож. числу, т.-е., единицѣ (см. прим. 3, § 173).

3) Уравненія вида: $ax + by = -c$ (или $-ax - by = c$) совсѣмъ не имѣютъ положительныхъ рѣшеній: ни цѣлыхъ, ни дробныхъ, потому что сумма положительныхъ количествъ не можетъ равняться отрицательному, и, наоборотъ, сумма отрицательныхъ количествъ не можетъ равняться положительному.

§ **175. Рѣшеніе задачъ. 1.** *Куплено нѣсколько аршинъ краснаго и синяго сукна. За аршинъ краснаго сукна платили $3\frac{1}{2}$ рубля, а за аршинъ синяго 2 р. 75 коп. Сколько аршинъ купили каждаго сорта, если извѣстно, что за все сукно уплачено 90 руб.?*

Допустимъ, что краснаго сукна купили x арш., а синяго y. Тогда изъ условія задачи имѣемъ слѣдующее уравненіе:

$$3\tfrac{1}{2}x + 2\tfrac{3}{4}y = 90, \text{ или } 14x + 11y = 360.$$

Такъ какъ это уравненіе обращается въ тождество, если $x = 10$, а $y = 20$, то

$$x = 10 + 11t;\ y = 20 - 14t.$$

Предѣлы для t изъ неравенствъ: $10 + 11t > 0$ и $20 - 14t > 0$ суть: $t > -\frac{10}{11}$ и $t < 1\frac{3}{7}$. Слѣдовательно, t можетъ равняться

0 и 1. Если $t=0$, то $x=10$, а $y=20$; если же $t=1$, то $x=21$, а $y=6$. Значитъ, данная задача имѣетъ два цѣлыхъ полож. рѣшенія.

2. *Сумма двухъ дробей, знаменатели которыхъ суть: 7 и 11, равняется $\frac{45}{77}$. Найти эти дроби.*

Обозначивъ числителя первой дроби черезъ x и второй черезъ y, получимъ уравненіе:

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{11}=\frac{45}{77} \text{ или } 11x+7y=45.$$

Это уравненіе обращается въ тождество, если $x=-1$ и $y=8$. Слѣдовательно,

$$x=-1+7t;\ y=8-11t.$$

Изъ неравенствъ: $-1+7t>0$ и $8-11t>0$ имѣемъ предѣлы для t; $t>\frac{1}{7}$ и $t<\frac{8}{11}$. Поэтому, данная задача не имѣетъ положительныхъ рѣшеній.

3. *Виноторговецъ купилъ вино двухъ сортовъ, всего болѣе 100, но менѣе 200 бутылокъ. За бутылку перваго сорта онъ платилъ 1 р., 25 коп., а за бутылку второго 75 коп. Сколько онъ купилъ бутылокъ каждаго сорта, если извѣстно, что вино перваго сорта обошлось на 6 руб. дороже, чѣмъ вино второго сорта?*

Обозначивъ число бутылокъ перваго сорта черезъ x, а второго черезъ y, получимъ уравненіе:

$$125x-75y=600, \text{ или } 5x-3y=24.$$

Это уравненіе обращается въ тождество, если $x=0$, а $y=-8$. Слѣдовательно:

$$x=3t;\ y=-8+5t.$$

Чтобы опредѣлить, сколько рѣшеній имѣетъ данная задача, мы должны принять во вниманіе первое условіе задачи, т.-е., что число всѣхъ бутылокъ должно быть болѣе 100 и менѣе 200. Поэтому, $x+y=3t+(-8+5t)=8t-8$ должно быть болѣе 100, но менѣе 200, или

$$8t-8>100 \text{ и } 8t-8<200.$$

Изъ этихъ неравенствъ имѣемъ: $t > 13\frac{1}{2}$ и $t < 26$; слѣдовательно, t можетъ равняться: 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 и 25. Значитъ, данная задача имѣетъ 12 различныхъ рѣшеній.

§ 176. Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій со многими неизвѣстными. Если мы имѣемъ систему уравненій, въ которой число неизвѣстныхъ единицею больше числа уравненій, то рѣшеніе такой системы всегда можно привести къ рѣшенію одного уравненія съ двумя неизвѣстными. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что мы имѣемъ два уравненія съ тремя неизвѣстными:

$$\begin{cases} 4x - 7y + 2z = 10 \ldots (1). \\ 7x + 16y - 4z = 75 \ldots (2). \end{cases}$$

Исключивъ z при помощи одного изъ извѣстныхъ способовъ (напр., при помощи уравн. коэффиц.), получимъ одно уравненіе съ двумя неизвѣстными:

$$15x + 2y = 95.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ, что

$$x = 5 - 2t;\ y = 10 + 15t.$$

Подставивъ въ первое изъ данныхъ уравненій вмѣсто x и y найденныя ихъ величины, получимъ:

$$4(5 - 2t) - 7(10 + 15t) + 2z = 10 \text{ или } 2z - 113t = 60 \ldots (3).$$

Такимъ образомъ, у насъ получилось новое уравненіе съ двумя неизвѣстными. Рѣшая его, получимъ, что $z = 30 + 113t_1$; $t = 2t_1$.

Подставивъ теперь въ выраженія для x и y вмѣсто t его величину: $2t_1$, получимъ: $x = 5 - 4t_1$; $y = 10 + 30t_1$. Слѣдовательно, цѣлыя рѣшенія для данныхъ уравненій будутъ:

$$x = 5 - 4t_1;\ y = 10 + 30t_1;\ z = 30 + 113t_1.$$

Чтобы найти положительныя рѣшенія, мы должны допустить, что

$$5 - 4t_1 > 0;\ 10 + 30t_1 > 0;\ 30 + 113t_1 > 0.$$

Рѣшивъ эти неравенства, мы получимъ:

$$t_1 < 1\tfrac{1}{4},\ t_1 > -\tfrac{1}{3} \text{ и } t_1 > -\tfrac{30}{113}.$$

Откуда видимъ, что t_1 можетъ равняться нулю и единицѣ. Слѣдовательно, данныя уравненія имѣютъ два цѣлыхъ положит. рѣшенія.

Изъ этого примѣра мы видимъ, что рѣшеніе двухъ уравненій съ тремя неизвѣстными приводится къ рѣшенію двухъ неопредѣленныхъ уравненій съ двумя неизвѣстными. Однако, если коэффиц. при одномъ изъ неизвѣстныхъ равенъ единицѣ, то рѣшеніе такой системы приводится къ рѣшенію одного только уравненія съ двумя неизвѣстными. Возьмемъ примѣръ:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 272, \\ 8x + 3y + 9z = 656. \end{cases}$$

Исключивъ изъ уравненій y, получимъ:

$7x + 3z = 160$. Откуда $x = 1 - 3t$; $z = 51 + 7t$.

Подставивъ въ первое уравненіе вмѣсто x и z ихъ величины, получимъ: $5(1 - 3t) + y + 4\ (51 + 7t) = 272$, — откуда $y = 63 - 13t$.

§ **177.** Такимъ же образомъ рѣшается система 3-хъ уравненій съ 4-мя неизвѣстными, 10 уравненій съ 11-ю неизвѣстными, вообще, системы, въ которыхъ число неизвѣстныхъ однимъ больше числа уравненій. Для этого изъ данныхъ уравненій посредствомъ извѣстныхъ способовъ исключенія получаютъ одно уравненіе съ двумя неизвѣстными. И если мы умѣемъ рѣшить послѣднее, то легко найти рѣшенія и для остальныхъ неизвѣстныхъ данной системы уравненій.

§ **178.** Возьмемъ задачу. *Куплено 100 штукъ скота: лошадей, коровъ, телятъ и овецъ, и заплачено за все 660 руб. За лошадь платили 40 руб., за корову 20 руб., за теленка 5 руб. и за овцу 2 руб. Сколько куплено лошадей, коровъ, телятъ и овецъ, если извѣстно, что лошадей было въ 11 разъ меньше, чѣмъ овецъ?*

Обозначивъ число лошадей черезъ x, число коровъ черезъ y, число телятъ черезъ z и число овецъ черезъ v, мы получимъ слѣдующія уравненія:

$$x + y + z + v = 100,$$
$$40\,x + 20y + 5z + 2v = 660,$$
$$11x = v.$$

Исключивъ изъ перваго и второго уравненій z, получимъ: $35x + 15y - 3v = 160$.

Подставивъ въ полученное уравненіе вмѣсто v его величину $11x$, найдемъ:

$$35x + 15y - 33x = 160 \text{ или } 2x + 15y = 160.$$

Откуда $x = 80 - 15t$; $y = 2t$; $v = 11x = 880 - 1\,65t$.

Подставивъ эти выраженія въ первое уравненіе вмѣсто x, y и v, получимъ:

$$(80 - 15t) + 2t + z + (880 - 165t) = 100 \text{ или } z = 178t - 860.$$

Изъ неравенствъ: $80 - 15t > 0$, $2t > 0$, $880 - 165t > 0$ и $178t - 860 > 0$ получаемъ предѣлы для t:

$$t < 5\tfrac{1}{3},\ t > 0 \text{ и } t > 4\tfrac{74}{89}.$$

Слѣдовательно, t можетъ равняться только 5, и потому данная задача имѣетъ одно рѣшеніе:

$$x = 80 - 15t = 80 - 75 = 5.$$
$$y = 2t = 10.$$
$$z = 178t - 860 = 890 - 860 = 30.$$
$$v = 880 - 165t = 880 - 825 = 55.$$

Задачи.

Найти формулы цѣлыхъ рѣшеній:

1803. $2x + 3y = 17.$

1804. $4x + 3y = 70.$

1805. $6x - 11y = 0.$

1806. $ax + by = 0.$

1807. $5x - 9y = 1.$

1808. $16x - 3y = 45.$

1809. $13x + 15y = 205.$

1810. $36x - 45y = 27.$

1811. $\frac{x}{6} + \frac{y}{7} = 5.$

1812. $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 8.$

1813. $\frac{4x+y}{3} + \frac{3x-2y}{4} = \frac{163}{180}.$

1814. $\frac{7+x}{5} - \frac{2x-y}{4} = 3y - 4.$

1815. $12x + 15y = 28.$

1816. $168x - 144y = 37.$

1817. $\frac{11x+7y}{2} - \frac{15x+9y}{5} = 16.$

Найти цѣлыя положительныя рѣшенія:

1818. $7x + 9y = 160.$

1819. $37x + 40y = 133.$

1820. $20x + 21y = 370.$

1821. $8x + 13y = 164.$

1822. $12x + 17y = 14.$

1823. $6x + 10y = 106.$

1824. $3x + 4y = 6.$

1825. $4x - 5y = 6.$

1826. $9x - 6y = 13.$

1827. $6x - 23y = 1.$

1828. $-3x + 14y = 16.$

1829. $-20x - 17y = 42.$

1830. $3x - 2y = 0.$

1831. $16x + 13y = 20.$

1832. $105x - 13y = 26.$

1833. $21x + 28y = 16.$

1834. $-39x - 14y = -81.$

1835. $-12x - 13y = -15.$

1836. $\frac{3x-6y}{8-2x} + \frac{9-4x}{5} = 4 - \frac{8x+7}{10}.$

1837. $2y+\frac{18x^2-8y^2-108}{6x+4y+3}=3x-4.$

1838. $\frac{18x^2-128y^2-217}{3x-8y-2}-6x=16y-1.$

1839. $\begin{cases}8x+7y=195.\\3y+4z=55.\end{cases}$

1840. $\begin{cases}10x+9y=1090.\\3y+7z=17.\end{cases}$

1841. $\begin{cases}3x-4y=1.\\3y-5z=-22.\end{cases}$

1842. $\begin{cases}6x-11y=1.\\6y+11z=116.\end{cases}$

1843. $\begin{cases}x+3y+5z=44.\\3x+5y+7z=68.\end{cases}$

1844. $\begin{cases}x+2y+3z=50.\\4x-5y-6z=-66.\end{cases}$

1845. $\begin{cases}x+y-4z=-19.\\3x+7y-8z=3.\end{cases}$

1846. $\begin{cases}x+y+2z=17.\\x+3y+4z=28.\end{cases}$

1847. $\begin{cases}x+2y+3z=14.\\2x+3y+4v=24.\\3x+4z+5v=35.\end{cases}$

1848. Найти два цѣлыхъ числа, которыя удовлетворяли бы слѣдующимъ условіямъ: если первое помножить на 5, а второе на 7, то сумма полученныхъ произведеній будетъ равна 58.

1849. Если одно изъ искомыхъ чиселъ умножить на 10, а другое раздѣлить на 6, то сумма полученнаго произведенія и частнаго будетъ равна 102. Найти эти числа.

1850. Если одно изъ искомыхъ чиселъ умножимъ на 11, а второе на 12, то разность между полученными произведеніями будетъ равна 1. Найти эти числа.

1851. Найти два числа по слѣдующимъ условіямъ: если мы первое число раздѣлимъ на 9 и къ полученному частному придадимъ утроенное второе, то эта сумма будетъ въ три раза больше разности искомыхъ чиселъ.

1852. Если отъ упятереннаго искомаго числа отнимемъ утроенное второе, то полученная разность на 15 будетъ больше суммы этихъ чиселъ. Найти эти числа.

1853. Найти дробь, которая обращается въ $\frac{7}{8}$, если прибавить къ числителю 12 и къ знаменателю 18.

1854. Найти дробь, которая обращается въ $\frac{3}{26}$, если отъ числителя отнять 5, а къ знаменателю прибавить 7.

1855. Знаменатели двухъ дробей суть: 4 и 9, а сумма этихъ дробей равна $\frac{17}{36}$. Найти эти дроби.

1856. Знаменатели двухъ дробей суть 13 и 9, а сумма этихъ дробей равна $\frac{52}{117}$. Найти эти дроби.

1857. Куплено за 8 рублей нѣсколько бутылокъ вина двухъ сортовъ. За бутылку перваго сорта платили 1 руб., 20 к., а за бутылку второго сорта 1 р., 60 коп. Сколько бутылокъ куплено каждаго сорта?

1858. На фабрикѣ мужчины зарабатываютъ въ день 1 руб., 20 коп., а женщины 90 коп. Сколько мужчинъ и женщинъ работаетъ на фабрикѣ, если извѣстно, что всѣ они вмѣстѣ зарабатываютъ въ недѣлю 378 руб.?

1859. Мальчикъ за каждую рѣшенную вѣрно задачу получалъ отъ отца 16 коп., а за каждую рѣшенную невѣрно онъ долженъ былъ платить отцу 20 коп. Сколько задачъ мальчикъ рѣшилъ вѣрно и сколько невѣрно, если по окончаніи работы онъ получилъ отъ отца 36 коп.?

1860. За 195 рублей куплено нѣсколько коровъ и овецъ; за каждую корову платили 25 руб., а за овцу 4 руб. Сколько куплено коровъ и сколько овецъ?

1861. Булочникъ купилъ нѣсколько пудовъ пшеничной и ржаной муки. За пудъ первой онъ платилъ 1 руб., 60 коп., а за пудъ второй 90 коп. Сколько пудовъ той и другой муки онъ купилъ, если за всю покупку онъ заплатилъ 34 рубля?

1862. Помѣщикъ продалъ 300 четвертей ржи и 250 четв. пшеницы за 4300 руб. По чемъ онъ продавалъ четверть ржи и четверть пшеницы?

1863. Общество, состоящее изъ мужчинъ и женщинъ, пожертвовало съ благотворительною цѣлью 71 руб. Каждый мужчина внесъ по 5 руб., а каждая женщина по 3 руб. Сколько было мужчинъ и сколько женщинъ?

1864. Сколькими способами можно размѣнять 100 рублевую ассигнацію на ассигнаціи 3-хъ и 5-ти рублеваго достоинства?

1865. Смѣшано два сорта муки по 9 к. и 5 коп. за фунтъ. Сколько взято отъ каждаго сорта, если извѣстно, что фунтъ смѣси стоитъ $6\frac{1}{2}$ коп.?

1866. Серебряникъ сплавилъ серебро 84-й пробы съ серебромъ 66-й пробы и получилъ сплавъ 77-й пробы. Сколько фунтовъ взялъ онъ отъ каждаго сорта?

1867. Лавочникъ смѣшалъ чай двухъ сортовъ. Фунтъ перваго сорта стоилъ 2 руб., 20 коп., а фунтъ второго 1 р., 40 к. Сколько фунтовъ взялъ онъ каждаго сорта, если, продавъ фунтъ смѣси по 2 р., 20 коп., получилъ 10% прибыли?

1868. Сколько нужно взять серебра 84-й пробы и 42-й пробы, чтобы сплавъ вышелъ 40-й пробы?

1869. Нѣкто на вопросъ, сколько у него денегъ, отвѣтилъ: у меня и у брата моего болѣе 100, но менѣе 130 рублей. Но если бы у меня было въ 7 разъ больше, а у брата въ 5 разъ больше того, что каждый изъ насъ имѣетъ, и братъ тогда далъ бы мнѣ 1 рубль, то у насъ стало бы денегъ поровну. Сколько денегъ имѣетъ каждый?

1870. Куплено въ классъ нѣсколько картинъ историческаго и географическаго содержанія, всего менѣе 100 экз. Картина историческаго содержанія стоила 1 р., 20 коп., а картина геогра-

фическаго содержанія 2 р., 50 к. Сколько купили тѣхъ и другихъ картинъ, если извѣстно, что первыя стоили на 4 руб. дороже вторыхъ?

1871. Какое число при дѣленіи на 4 даетъ въ остаткѣ 3, а при дѣленіи на 9 даетъ въ остаткѣ 8?

1872. Искомое число при дѣленіи на 13 и 29 даетъ въ остаткѣ 2. Найти это число.

1873. Задуманное число меньше 150 и больше 100. Найти это число, если извѣстно, что отъ дѣленія его на 5 получается въ остаткѣ 2, а отъ дѣленія на 9 получается въ остаткѣ 4.

1874. Разложить 75 на двѣ такія части, чтобы при дѣленіи первой на 13 получился бы остатокъ 9, а при дѣленіи второй на 7 получился бы остатокъ 5.

1875. Женщина имѣетъ меньше 3, но болѣе 2 рублей. Если она станетъ давать нищимъ по 15 коп., то послѣдній нищій получитъ только 10 коп.; если же она станетъ давать по 14 коп., то послѣдній нищій получитъ 12 коп. Сколько имѣетъ денегъ женщина?

1876. Мальчикъ, играя орѣхами, которыхъ у него было болѣе 300 и менѣе 500, пожелалъ разложить ихъ въ кучки. Если онъ станетъ класть въ кучку по 15 орѣховъ, то въ послѣднюю кучку придется положить 5 орѣховъ; если же онъ станетъ класть ихъ по 25, то въ послѣдней будетъ 20 орѣховъ. Сколько орѣховъ было у мальчика?

Найти цѣлыя положительныя числа для x, которыя бы обращали данныя выраженія въ цѣлыя положительныя числа:

1877. $\frac{7x-4}{5}$. **1878.** $\frac{17-2x}{3}$.

1879. $\frac{420-4x}{7}$. **1880.** $\frac{5-3x}{9}$.

Найти цѣлыя положительныя числа для x, которыя бы обращали данныя выраженія въ цѣлыя четн. положит. числа:

1881. $\frac{25-3x}{4}$. **1882.** $\frac{7x-12}{9}$.

1883. $\frac{35x-9}{3}$. **1884.** $\frac{35-2x}{4}$.

Найти цѣлыя положит. числа для x, которыя бы обращали данныя выраженія въ цѣлыя полож. нечетныя числа:

1885. $\frac{6x-5}{13}$. **1886.** $\frac{170-5x}{3}$.

1887. Найти два числа, разность квадратовъ которыхъ равняется суммѣ этихъ чиселъ.

1888. Найти три цѣлыхъ положительныхъ числа, сумма которыхъ равна 39; если же первое помножить на 5, второе на 6 и третье на 7, то сумма произведеній будетъ равна 236.

1889. Нѣкто купилъ 33 фунта чаю трехъ сортовъ, и заплатилъ за все 60,1 руб. Сколько купилъ онъ каждаго сорта, если за фунтъ перваго сорта онъ платилъ 1 р., 75 коп., за фунтъ второго — 1,8 руб. и за фунтъ третьяго 1 р., 90 коп.? (Рѣшить въ цѣл. числахъ.)

1890. Для починки дома наняты плотники, столяры и печники, всего 35 человѣкъ. По окончаніи работы каждый плотникъ получилъ 21 руб., каждый столяръ 8 руб. и каждый печникъ 3 руб. Сколько было плотниковъ, столяровъ и печниковъ, если извѣстно, что всѣ они за работу получили 515 руб.?

1891. За 300 рублей куплено 300 штукъ скота: козъ, овецъ и ягнятъ. За каждую козу платили 5 рублей, за овцу 3 рубля и за каждаго ягненка 50 коп. Сколько куплено козъ, овецъ и ягнятъ?

1892. Нѣкто на вопросъ, сколько ему лѣтъ, отвѣтилъ, что отецъ его старше на 32 года; если же увеличить число лѣтъ отца въ пять разъ, лѣта его въ 3 раза и лѣта брата его въ шесть разъ, то получится въ суммѣ 324 года. Сколько лѣтъ отцу и его сыновьямъ, если извѣстно, что сумма ихъ лѣтъ больше 65 и меньше 71?

1893. Виноторговецъ имѣлъ вино трехъ сортовъ. Онъ разсчитывалъ при продажѣ получить 14,4 руб. прибыли, если на бутылкѣ перваго сорта будетъ наживать 30 коп., на бутылкѣ второго 20 коп. и на бутылкѣ третьяго сорта 15 коп. Но при переноскѣ бутылки третьяго сорта разбились; поэтому, продавая первый сортъ съ прибылью по 50 коп. на бутылкѣ и второй съ прибылью по 25 к., онъ не только не получилъ прибыли на всемъ винѣ, но еще потерялъ 1 р., 50 коп. Сколько бутылокъ было каждаго сорта, если бутылка третьяго сорта ему самому стоила 90 коп.?

1894. Сколькими способами можно 100 рублевую ассигнацію размѣнять на 25, 5 и 3-хъ рублевыя ассигнаціи такъ, чтобы первыхъ было въ 5 разъ меньше третьихъ?

1895. Общество, состоящее изъ мужчинъ, женщинъ и дѣтей, пожертвовало въ пользу голодающихъ 42 рубля. Мужчины жертовали по 3 руб., женщины по 1 р., 50 к. и дѣти по 75 коп. Сколько было мужчинъ, женщинъ и дѣтей, если всего въ обществѣ находилось 19 человѣкъ?

1896. Серебряникъ сплавилъ серебро трехъ сортовъ: 84-й, 60-й и 64-й пробы, всего 36 фунтовъ. Сколько онъ взялъ отъ каждаго сорта, если сплавъ получился $68\frac{2}{9}$ пробы? (Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ.)

1897. Помѣщикъ купилъ въ имѣніе лошадей, коровъ и овецъ; при чемъ овецъ на 25 болѣе, чѣмъ лошадей. За весь скотъ онъ уплатилъ 814 рублей. Сколько купилъ помѣщикъ лошадей, коровъ и овецъ, если за лошадь онъ платилъ 50 руб., за корову 32 рубля и за овцу 6 рублей?

1898. Найти 3 цѣлыхъ положительныхъ числа, которыя бы удовлетворяли слѣдующимъ условіямъ: если отъ бóльшаго отнять утроенное меньшее число, то получится среднее; если же къ бóльшему придать удвоенную сумму остальныхъ, то получится 65.

1899. Найти трехзначное число, которое удовлетворяло бы слѣдующимъ условіямъ: если единицы его разрядовъ соотвѣтственно помножить на 3, 7 и 11 и полученныя произведенія сложить, то сумма будетъ равна 112; если же къ данному числу придать 139 и полученную сумму помножить на 3, то произведеніе будетъ равно числу, которое изображено тѣми же цифрами, но въ обратномъ порядкѣ.

1900. Какое число при послѣдовательномъ дѣленіи на 7, 9 и 11 даетъ въ остаткѣ 2?

1901. Какія числа при дѣленіи на 7, 8 и 9 даютъ въ остаткѣ: 5, 6 и 7?

1902. Найти число, которое при дѣленіи на 5 даетъ въ остаткѣ 4, при дѣленіи на 6 даетъ въ остаткѣ 5 и при дѣленіи на 7 даетъ въ остаткѣ 6.

1903. Найти всѣ числа, меньшія 10000 и бóльшія 100, которыя при дѣленіи на 12, 13 и 14 даютъ соотвѣтственно остатки 11, 12 и 13.

1904. Найти 4 числа по слѣдующимъ условіямъ: если къ первому послѣдовательно придавать утроенныя послѣднія числа, то получатся слѣдующія суммы: 65, 95 и 125.

1905. Четыре лица имѣютъ вмѣстѣ меньше 100 руб. Если первый отдастъ изъ своихъ денегъ второму 10 рублей, а третій отдастъ четвертому 15 руб., то у всѣхъ будетъ поровну. Сколько денегъ имѣетъ каждый?

1906. Пять человѣкъ играли въ кости съ тѣмъ условіемъ, что каждый проигравшій долженъ платить остальнымъ столько, сколько они имѣли передъ сыгранной партіей. Послѣ 5 партій, проигранныхъ каждымъ поочередно, у всѣхъ стало поровну. Сколько денегъ каждый имѣлъ до игры, если извѣстно, что всѣ они вмѣстѣ имѣли болѣе 300, но менѣе 500 рублей?

ОТВѢТЫ.

1. $a+b$. **2.** $a+b+c+d$. **3.** $a+m+n+p$. **4.** $b-a$. **5.** $a-b-c-d$. **6.** $s-m-n-p$. **7.** am. **8.** abc. **9.** $am+b-k$. **10.** $\frac{m}{a}$. **11.** $\frac{a}{n}:c$. **12.** $a+b+c+d$. **13.** $a-x$. **14.** mn и $\frac{m}{n}$. **15.** a^2. **16.** k^3. **17.** $40a$. **18.** $1500r$. **19.** $32a+b$. **20.** $\frac{n}{7}$. **21.** $\frac{a}{1280}$. **22.** $4a$. **23.** $2abc+3xy$. **24.** $2ab-3cd$. **25.** $abx-2x+2bc$. **26.** $\frac{3}{4}ab$. **27.** $\frac{4}{9}x$. **28.** $\frac{2}{5}a-\frac{3}{4}b$. **29.** $\frac{2}{7}xy-\frac{2}{3}zx$. **30.** $ab+ab+ab$. **31.** $xyz+xyz+xyz+xyz$. **32.** $abc+abc+abc+abc+xy+xy+xy$. **36.** a^5. **37.** x^7. **38.** a^2b^3. **39.** $x^2y^6z^3$. **40.** $5a^2b^3c$. **41.** $12x^3y^2z^4$. **42.** $6a^2b^3+4a^3b^2$. **43.** $9xy^3-5x^3y$. **44.** $7ab^3-4a^2b^2+5a^3b$. **45.** aa. **49.** $3aabbb-4aaabb$. **53.** $aa+aa+aa$. **56.** $aaabb+aaabb$. **57.** $aab+aab+aab+abb+abb+abb+abb$. **59.** 9. **60.** 3. **61.** 2. **62.** 5. **63.** $\frac{5}{6}$. **64.** $\frac{1}{2}$. **65.** a^2+b^2. **66.** a^2-b^2. **67.** $10a+b$. **68.** $1000a+100b+10c+x$. **69.** $2a$. **70.** $2a+1$. **71.** $p-1$, $p+1$. **72.** $m-2$, $m-4\ldots$ **73.** $\frac{ma+m_1b}{m+m_1}$. **74.** $\frac{n_1a+n_2b+n_3c+n_4d}{n_1+n_2+n_3+n_4}$. **75.** $ma+\frac{ma}{5}$. **76.** $\frac{abns_1}{a_1n_1s}$. **77.** $\frac{4{,}5nb_1(24-c)}{ab}$. **78.** $1:\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}\right)$. **79.** $a:\left(\frac{c}{n}-\frac{b}{m}\right)$. **80.** 1-й $\frac{as}{a+b+c}$, 2-й $\frac{bs}{a+b+c}$, 3-й $\frac{cs}{a+b+c}$. **81.** 216. **82.** 4. **83.** 11. **84.** $\frac{19}{216}$. **85.** 9. **86.** 1. **87.** 14. **88.** $5\frac{5}{8}$. **89.** 20. **90.** $12\frac{1}{27}$. **91.** 60. **92.** 3. **93.** 35. **94.** 41. **95.** 51. **96.** 23. **97.** 38. **98.** 21. **99.** $11\frac{1169}{4096}$. **100.** $\frac{1}{8}$. **101.** 36. **102.** 54. **103.** 671. **104.** 80. **105.** 64. **106.** 44. **107.** 316. **108.** 49. **109.** $\frac{31}{32}$. **110.** 4. **111.** $\frac{6}{7}$. **112.** $\frac{1}{3}$. **113.** $1\frac{1}{2}$. **114.** $\frac{1}{4}$. **115.** $\frac{2}{3}$. **116.** $\frac{2}{3}$. **117.** 4. **118.** $\frac{6}{25}$. **119.** 3. **120.** 9. **121.** $a+b=x$. **122.** $m-n=x+p$. **123.** $ab=a+b$. **124.** $a-c=b$. **125.** $a=bm$. **126.** $an=b$. **127.** $ab=c-d$. **128.** $\frac{a}{b}=7xy$. **129.** $x=\frac{m}{a}-\frac{n}{b}$. **130.** $x=\frac{d}{a}$. **131.** $10a+b+m=10b+a$. **132.** $100a+10b+c-m=100c+10b+a$. **133.** $\frac{a+m}{b}=\frac{b}{a}$. **134.** $\frac{x}{y-d}=\frac{y}{x}$. **135.** $\frac{m:a}{n}=\frac{n}{m}$. **136.** $\frac{a:m}{bn}=\frac{b}{a}$. **137.** $a+b>a-b$. **138.** $ab>\frac{a}{b}$. **139.** $\frac{m}{n}>a+b+c$. **140.** $ab<c-d$. **141.** $a+b<a^2+b^2$. **142.** $abcd<a^3+b^3+c^3+d^3$.

171. $10a^2b$. **172.** $32ab^2+16a^2b$. **173.** $32xy^2+29x^2y$. **174.** $26a^2-15xy^2$. **175.** $14a^3-8ab^2$. **176.** $17a^2-28b^3+16ab^2$. **177.** $13(a+b)^2$. **178.** $12(a-b)^3$. **179.** $15a^2b$. **180.** ab^2. **181.** $27ab^2+10a^2b-3a$. **182.** $2a^3-9ab^2$. **183.** $3a^2-4ab$. **184.** $2abx-20a^2x$. **185.** $-x^m+9y^n+y^m$. **186.** $3a^m+28a^n$. **187.** $(a-b)+22(a+b)$. **188.** $10(x-y)^3-3(a+b)^3$. **189.** $5(a+b)^3-3a(a+b)^2+2a(a+b)^3$. **190.** $18(x+z)^3+3(y-x)^3+14(x-z)^3$. **191.** $-4a^2b$.

192. $2\frac{2}{3}a^2bc-\frac{1}{4}abc^2$. **193.** $-a^2-ab+2cd-2d^2$. **194.** x^3-8uv^2. **195.** $1,7m-$
$-7n-68p$. **196.** $36,7(a+b^2)-46,5(a+b)^2+42,08x^2$. **197.** 30. **198.** -1.
199. 8. **200.** -84. **201.** 0. **202.** -8. **203.** 11,5. **204.** 47. **205.** $a+m-n$.
206. $x+y-z$. **207.** $-a-b+c$. **208.** $m-n-p+q$. **209.** $3a^2-4b^2$.
210. $2a^2b-3ax^2$. **211.** $0,4a^2-3b^2+0,4c^2$. **212.** $6,1ax^3-3a^2x^2-6b^4$.
213. $2,1a^3-16a^2b-1,4c^3$. **214.** $0,2x^2$. **215.** $13a^2b-10xy^2-13ab^2+10x^2y$.
216. $-x^2z-0,8z^3$. **217.** $5(a+b^2)-20(a+b)^2$. **218.** $(x-y)^2+11(a-b)^2-$
$-3(x-y)$. **219.** $9x^3-8x^2y+4xy^2$. **220.** $6ab+3b^2-13a^2$. **221.** $4x^2+2x$.
222. $10a^3b+2a^2b^2-38ab^3$. **223.** $72a^2+20a+21x^3$. **224.** $-2x^3-10cx^2+$
$+ab^2+3c^2x-12c^3+2abc$. **225.** $38bx^3+14b^2x^2+b^3x-2a^2bx$. **226.** 0.
227. $14(a-b)^2-11(a-b)+4$. **228.** $3,3a^2(x-y)-2\frac{1}{3}a(x-y)^2-7,7(x-y)^3$.
232. 39. **233.** -39. **234.** 61. **235.** 23. **236.** $-45,36$. **237.** -49.
238. -14. **239.** 20. **240.** $a-b$. **241.** $x+y$. **242.** $3b-4c$. **243.** $7a^2+4a^3$.
244. 0. **245.** $16a^2$. **246.** $-3ab-4a^2$. **247.** $2a^3$. **248.** $5,6a^3-3a^2+2a-1$.
249. $4,9x^2a^2+3xy+12$. **250.** $6,4(a+b)^2$. **251.** $4(x-y)^m-3(x-y)^n+$
$+2(x-y)^p$. **252.** $7a-4b$. **253.** $4x^2-4y$. **254.** $-a^3-4a^2+a$.
255. $5,2x^2-3ab$. **256.** $1+3a^2+4a$. **257.** $6a^3-4x^2$. **258.** $4,2a-b$.
259. $2b^2$. **260.** $8a-8b$. **261.** $3a^2-a+1$. **262.** $4a^2-ab+7b^2$.
263. $-0,5x^2+3,3x+6,5$. **264.** $2x^3-8x^2y-5xy^2-3y^3$. **265.** $4ab$.
266. $-4ab$. **267.** $6a^2b+2b^3$. **268.** $-6a^2b-2b^3$. **269.** $8a^3b+8ab^3$.
270. $-8a^3b-8ab^3$. **271.** $2a^3-a^2-2a-2$. **272.** $4a^3-6a^2+8a+3ab^2$.
273. $3a^3-5a^2b+3ab^2-2b^3$. **274.** $-4y^2$. **275.** $9\frac{11}{15}m^2n^2-1\frac{1}{4}m^2p^2+9\frac{1}{3}n^2p^2$.
278. $a+b-c+d$. **279.** $a-b+c-d$. **280.** $x-y-z-u$. **281.** a^2-
$-b-c+d$. **282.** $a-b+c+d-f+e+k$. **283.** $-a+b-c-d$. **284.** $-9a$.
285. $4x^2$. **286.** $2a+2b+6c$. **287.** $2m+n+2p-q$. **288.** $-3x^2y+\frac{1}{4}xy^2$.
289. $6abc+3a^2b-6ab^2$. **290.** $-6a^2-b^2+6ab$. **291.** $-a^3+16a^4+3a^2+8a^5$.
292. $m^2+7b^2-11a+3b-7a^2$. **293.** $x^2-5y^2-4z^2$. **294.** $18a^m+19a^n$.
295. $3a^2-5ab+2b^2$. **296.** $4-4a+3b+6d$. **297.** $-a-b+c$. **298.** $3a^2-$
$-4bc+3ac-2b^2$. **299.** $-6x^2+4y^2-4xy$. **300.** $-10a^2+5ab+3b^2$.
301. $-11a^2+2b^2+3ab$. **302.** a^2-4a+1. **303.** $2d^2$. **304.** $2a+2b-2c$.
305. 0. **306.** $-2a+2b+2c$. **307.** $-2a+2b-2c$. **308.** $-5a^2+5ab+2b^2$.
309. $5a^2-5ab-2b^2$. **310.** $13a^2-9ab$. **311.** $-3a^2+ab+6b^2$.
314. $-(2a^2-3a+1)$. **316.** $-[-a^4+(3a^3-4a^2)+(2a+3)]$. **317.** $-2,68$.
318. $-\frac{253}{900}$. **319.** 5,12. **320.** $1\frac{1}{16}$. **321.** $-3,6$. **322.** -336. **323.** $-abc$.
324. abc. **325.** $-xyz$. **326.** $mnpq$. **327.** $zfuv$. **328.** $ztuv$. **329.** $12ab$.
330. $30,4axyz$. **331.** $44,8abx^2y$. **332.** $23x^2yzt$. **333.** a^5. **334.** b^{11}.
335. m^{11}. **336.** m^{31}. **337.** a^4. **338.** b^8. **339.** c^{n+2}. **340.** x^{n+5}.
341. b^{n+5}. **342.** y^{x+1}. **343.** a^{n+m}. **344.** c^{n+m}. **345.** a^{2x}. **346.** b^2.
347. a^{2m+n-2}. **348.** x^{2n+2}. **349.** $20a^5$. **350.** $28a^4$. **351.** $12a^5b^3c$.
352. $+56a^4b^3x^3y$. **353.** $16a^3x^3$. **354.** $-30a^4b^4$. **355.** $-12(a-b)^5$.
356. $-0,28x^5y^3$. **357.** $-2a^3b^5x^3$. **358.** $-12,24a^4m^4$. **359.** $9a^4b^2$.
360. $16c^4d^2e^2$. **361.** $0,49a^6b^4$. **362.** $31,36a^6b^2x^2$. **363.** $9a^4x^4y^2$.
364. $1,69a^4x^4$. **365.** $36a^6x^2$. **366.** $8a^5b^2x^2$. **367.** $343a^3b^6$. **368.** $-0,064a^3b^6$.
369. $-0,064x^6y^9z^{3n}$. **370.** $256a^{12}b^3$. **371.** $24a^5b^7$. **372.** $-864a^8b^6x$.
373. $16a^{12}b^8x^4$. **374.** $81a^{20}b^8y^4$. **375.** $-12a^2b(x-y)^3$. **376.** $28a^2b(a^2-b^2)^2$.
377. $48a^7b^{n+2}c^3$. **378.** $24a^{2n+3}b^mc^3$. **379.** $-\frac{1}{3}a^{m+n+2}b^3c^{2n-1}$. **380.** $-0,6a^2b^{2n-1}c^{2x}x$.
381. $\frac{3}{4}a^3x^{3n+5}$. **382.** $4a^3-4a^2b+4ab^2$. **383.** $-3a^3b-3a^2b^2+3ab^3$.
384. $28a^4-21a^3+14a^2$. **385.** $1,2a^2x^3-10,2ax^4+12x^5$. **386.** $-30a^4x^2+$
$+15a^3x^3-20a^2x^4+30ax^5$. **387.** $1,96m^4n^4p^2-1,12m^4n^2p^4-0,84m^2n^4p^4$.

388. $12x^{m+2}+24x^{m+1}-4x^{m-1}$. **389.** $2a^{n+2}b^{n}-4a^{n+3}b^{n-1}+6,3a^{n+4}b^{n-2}-5a^{n+5}b^{n-3}$. **390.** $12a^2x^4-9a^3x^3+12a^4x^2$. **391.** $18a^5b^2x^3+24a^4b^2x^4-18a^3b^2x^5-24a^2b^2x^6$. **392.** $12,9a^4b^4-8,6a^4b^2x^2+2,58a^2b^4x^2$. **393.** $-8b^{m+1}y^2+6b^my^3+4b^{m-1}y^4$. **394.** $6a^{2n}b-12a^{3m}b^{m+2n}$. **395.** $10a^2b-12a^3+3ab^2$. **396.** $-2a^2b+12a^3+3ab^2$. **397.** $5a^2x^3-12a^4b+8a^3b^2-16a^2b^3$. **398.** $-a^2x^4+9a^3x^3+16a^4x^2$. **399.** $8a^3b-12a^3b^2+18a^4b+6a^2b^3$. **400.** $-18a^5+12a^3-24a^4$. **401.** $-9a^2bx+27a^3bx-42a^3bx^2$. **402.** $-4,48a^{2x}+5,28a^{2x+n-1}$. **403.** $ac+ad+bc+bd$. **404.** $ac-ad-bc+bd$. **405.** $a^2+8a+15$. **406.** $12a^2-17a+2,5$. **407.** $28a^2-17ab-3b^2$. **408.** $20a^4+2a^3b-6a^2b^2$. **409.** $0,8x^4y^2+7,4abx^2y-6a^2b^2$. **410.** $0,6x^2y^2-12,4abxy+8a^2b^2$. **411.** $x^{2m}+4x^{m-n}y^n-3x^{m+n}y-12y^{n+1}$. **412.** $48a^{2m}+18a^{m+2}-32a^{2m-1}-12a^{m+1}$. **413.** $8a^3-8a^2+4a-1$. **414.** $16a^3-16a^2b+11ab^2-2b^3$. **415.** $-4a^3+8a^2-a-1$. **416.** $2a^4+7a^3b-8ab^3+3b^4$. **417.** a^6-2a^4+1. **418.** $32a^8-12a^6-8a^5+11a^3-2$. **419.** $8a^{m+4}b^2-18a^{m+3}b^3+21a^{m+2}b^4-18a^{m+1}b^5$. **420.** $6a^6b^2-21,5a^4b^4-44a^3b^5+10a^2b^6$. **421.** $5x^5+4x^4y-6x^3y^2+1,8x^2y^3+1,6xy^4-4y^5$. **422.** $6a^4+8a^3-15a^2+10a-3$. **423.** $27a^4-6a^2+\frac{1}{3}$. **424.** $24x^4-36x^3y+37x^2y^2-17xy^3+6y^4$. **425.** $6a^4+6a^3b-9a^2b^2+24ab^3-9b^4$. **426.** $16a^4+24a^3+a^2-6a+1$. **427.** $9a^4-42a^3+37a^2+28a+4$. **428.** $10a-41a^3+2a^5+23a^7+6a^9$. **429.** $10a^3-19a^6-33a^9+20a^{12}+14a^{15}$. **430.** $16a^2b^5-20a^3b^4+10a^4b^3+11a^5b^2-14a^6b+12a^7$. **431.** $x^8+x^4+x^2-x+2$. **432.** x^5+y^5. **433.** $x^5-2x^4y+2x^3y^2-2x^2y^3+2xy^4-y^5$. **434.** $x^5+2x^4y+2x^3y^2+y^5$. **435.** $16x^8-y^8$. **436.** $64+432a^3-648a^4+972a^5-729a^6$. **437.** $1024a^{10}-576a^6-64a^4+116a^2-10$. **440.** x^2-6x+9. **441.** $4a^2b^2+16ab+16$. **442.** $16a^2b^2+24a^2b+9a^2$. **443.** $4a^4+2a^2b+\frac{1}{4}b^2$. **444.** $49x^4-14n^3x^2+n^6$. **445.** $16a^4+24a^{n+2}+9a^{2n}$. **446.** $64a^{2n-2}+48a^{n-1}b+9b^2$. **447.** $49a^4b^{2n-2}-56a^{n+3}b^{n+1}+16a^{2n+2}b^4$. **448.** $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. **449.** $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz$. **450.** $a^2+a^2b^2+b^2-2a^2b+2ab-2ab^2$. **451.** $4a^4-8a^3+4a^2$. **452.** $9a^4-6a^3b+a^2b^2$. **453.** $16a^6-32a^5b+40a^4b^2-15a^2b^4+18ab^5+9b^6$. **456.** $9a^4b^2-16a^2b^4$. **457.** $16a^2n^2-4a^4x^2$. **459.** $49a^4-64b^4$. **460.** $x^{10}-y^{10}$. **461.** $a^4b^{2n}-x^2$. **462.** a^2-b^2. **463.** $16x^2-9$. **464.** $16a^2b^4-9a^4b^2$. **465.** $a^2+2ab+b^2-c^2$. **466.** $a^2-b^2-2bc-c^2$. **467.** $a^4-2a^3+a^2-1$. **468.** x^4-x^2-6x-9. **469.** $a^2+2ac+c^2-b^2$. **470.** $4y^2-9x^2+6xz-z^2$. **471.** $a^6-14a^4+25a^2$. **472.** x^4-a^4. **473.** $x^4-2x^2a^2+a^4$. **476.** a^3+3a^2+3a+1. **477.** $a^3-12a^2+48a-64$. **478.** $64a^6+144a^4b+108a^2b^2+27b^3$. **479.** $64x^6y^3-288x^4y^2+432x^2y-216$.

492. 3,2. **493.** —0,02. **494.** $-6\frac{6}{7}$. **495.** 8. **496.** $\frac{a}{b}$. **500.** $2a$. **501.** $\frac{2}{3}ab^2$. **502.** $\frac{3}{8}ax$. **503.** $2\frac{2}{3}a^2x$. **504.** a^2. **507.** 1. **508.** $\frac{a^3}{a^7}$. **510.** a^{m-n}. **511.** x^{p-1}. **512.** $-a^{n-1}$. **513.** x^3. **514.** a^{2x-4}. **515.** b^{2m-2}. **516.** $9a^2$. **517.** $0,9a^3$. **518.** $\frac{1}{8}a^3x$. **519.** $0,09a^2b^2m^2$. **520.** $-6a^{n-1}bx^{m-n}$. **521.** $2a^{n-m}b^{m-n}$. **522.** $4b(x-y)^2$. **523.** $1\frac{1}{2}x^{m-1}(x+y)^{n-1}$. **524.** $3ab^{2n-m+3}$. **525.** $2,5ab^{2m-2n}$. **528.** $2a^3-3a^2b+ab^2$. **529.** $-2a^2+ax-3x^2$. **532.** $-5+4a-3a^2$. **533.** $5x^2-2ax+a^2$. **534.** $abx-b^2x+4ax^2$. **535.** $a^2b+4b^2x-4ax^2$. **536.** $2a^3-1,5a^2+a-1,5$. **537.** $2\frac{1}{3}+x-1\frac{1}{3}x^2$. **538.** $1,5x^3-abx+0,5ab^2$. **539.** $1,5y^4+a^2x-1,5a$. **540.** $0,2a^3-0,4a^2b+0,3ab^2$. **541.** $2x^2+xy-6,25y^2$. **542.** $\frac{5}{6}p^2-\frac{7}{6}m^2+1\frac{5}{12}n^2$. **543.** $3a^{m-2}-4a^{m-3}+2a^{m-4}$. **544.** $1\frac{3}{4}a^9-\frac{3}{4}a^7+a^5$. **545.** $0,1y^2+0,07xy-0,09x^2$. **546.** $(a+$

$+b)^5-(a+b)^2+1$. **548.** $\frac{4a}{2a+1}$. **549.** $\frac{3ab}{a^2-ab+b^2}$. **550.** $\frac{6xy}{x+y}$. **551.** $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. **552.** $a-2b$. **553.** $x-7$. **554.** $a-4$. **555.** $a-b$.

556. $x+5$. **557.** $4a+2b$. **558.** $7a-x$. **559.** $3a^2+5$. **560.** $4{,}6x^2+2$. **561.** $6a^2-3b$. **562.** $-6x^2-4y$. **563.** $2a^2-a+1$. **564.** $x+3$. **565.** $2x-3y$. **566.** $7x^2-3ax-a^2$. **567.** $10a^2-3ab-b^2$. **568.** $4n-1$. **569.** $6a^2-3ax+x^2$. **570.** $-3ab+2ac-d$. **571.** $2a^2+2a$. **572.** $3a^3-2a+1$. **573.** m^2+1. **574.** z^4+z^2-1. **575.** $2a^2-ax+3x^2$. **576.** $xy+2y^2$. **577.** a^2-2a+1. **578.** x^2+x-1. **579.** $3m^2+6m-5$. **580.** $3x^2-5x-3$. **581.** $10-2a+7a^2$. **582.** $2a^2+3ax-2x^2$. **583.** n^3+2n^2+n. **584.** $4m^3-3m+1$. **585.** $3a^3-2a^2+1$. **586.** a^4-a^2+1. **587.** a^3-2a^2+3a+1 и ост. -6. **588.** $x^3-x^2y+xy^2-y^3$. **589.** a^3+a^2-a+1. **591.** $\frac{1}{2}a^2-3\frac{1}{2}a+1$. **593.** $\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{9}a-\frac{1}{18}$. **594.** $\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{7}$. **595.** $3a^2-2a$ и въ остаткѣ: $5a-4$. **596.** $2x^2+3$ и въ остаткѣ: $5x+8$. **597.** $3a^2-4ab+b^2$ и въ остаткѣ: $3ab^3+4b^4$. **598.** $1+q+q^2+q^3\ldots$ **599.** $x-xq+xq^2-xq^3+\ldots$ **600.** $x^3+x^2y+xy^2+y^3$. **602.** x^2-xy+y^2. **603.** $m^3-m^2n+mn^2-n^3$. **604.** $a^4-3a^3x+9a^2x^2-27ax^3+81x^4$. **605.** x^4-x^2+1. **606.** $x^6-x^3n+n^2$. **607.** $x^4y^2-x^2y+1$. **608.** $x^{16}-x^{12}+x^8-x^4+1$. **609.** $x^{4n}-x^{3n}y^n+x^{2n}y^{2n}-x^ny^{3n}+y^{4n}$.

610. $7(a+b)$. **611.** $x(a+b)$. **612.** $3(a-b)$. **613.** $x(a-b)$. **614.** $5(b+1)$. **615.** $a(b-1)$. **616.** $a(18b-1)$. **617.** $8a(4a-1)$. **618.** $a(a+b)$. **619.** $x^5(1-x)$. **620.** $a^2b^3(a^2+b^2)$. **621.** $4a^2b^2(4a-3b)$. **622.** $5x^2y^2(2x^2+7y^2)$. **623.** $6x^2y(6x-y)$. **624.** $a^n(a-1)$. **625.** $2x^{r-1}(9-8x)$. **626.** $x^n(x^m+1)$. **627.** $x^p(1-x^{n-p})$. **628.** $y^m(y^{2m}-2)$. **629.** $-a(4a+3b)$. **630.** $-2a^2b(8a^3-5b^3)$. **631.** $a(m-n+p)$. **632.** $8ab(2a^2+3ab-4b^2)$. **633.** $-a(b+c+d)$. **635.** $x^{r+1}(a+bx-cx^2)$. **636.** $5[2(a-b)+3]$. **637.** $6(a+b-4)$. **639.** $2(4a+3b)$. **640.** $(x+y)(a+b)$. **641.** $(a-b)(3m-4n)$. **642.** $(x-1)(a+2b)$. **643.** $(x+y)(x+y+a)$. **644.** $a(b+c)(a-b)$. **646.** $(a^2-2a-1)(a-b)$. **647.** $(n+m)(4a-3a^2-1)$. **648.** $(p-q)(3a-2b)$. **649.** $(a-n)(6a^2-2a-1)$. **650.** $(c+x)(a+b)$. **651.** $(x-y)(x^2+3y^2)$. **652.** $(x+2)(x^2-2)$. **653.** $(3c-2d)(9a-2b)$. **654.** $4(4x+3y)(a+b)$. **655.** $6a(4x-y)$. **656.** $(x-y)(a+b+c+d)$. **657.** $ab^2(2ac^2-b)(8a^2b+1)$. **658.** $(x-y)(a+b-c)$. **659.** $(a-b)(n^2-n+1)$. **660.** $3(a^2+b^2)$. **662.** $(x-y)^2$. **663.** $(a-1)^2$. **664.** $(x^2+y^2)^2$. **665.** $(3c-n)^2$. **666.** $3xy(a+b^2)^2$. **668.** $-(x+y)^2$. **669.** $-2(x-1)^2$. **670.** $-(3a^2-b^2c^3)^2$. **672.** $(x^n-y^n)^2$. **673.** $(7a-19b)^2$. **674.** $(a+b+c)^2$. **675.** $(a-b+c)^2$. **676.** $(a-b-c)^2$. **678.** $(a+4)(a-4)$. **679.** $(6+xy)(6-xy)$. **681.** $(5a+b)(5a-b)$. **682.** $(\frac{1}{2}xy^2+0{,}1)(\frac{1}{2}xy^2-0{,}1)$. **683.** $6cx(2c+x)(2c-x)$. **685.** $(x+y+z)(x+y-z)$. **686.** $(a+b+c)(a-b-c)$. **687.** $(a+b+c-d)(a+b-c+d)$.

689. $(x+y+z)(x+y-z)$. **690.** $(a+b+c)(a-b-c)$. **691.** $(2n+p-q)(2n-p+q)$. **692.** $(m+n)(m+n-p)$. **693.** $(b-c)(a-b+c)$. **694.** $(z-y)(x^2z+x^2y+1)$. **695.** $(x+y+z-t)(x+y-z+t)$. **696.** $(a-b+c+d)(a-b-c-d)$. **697.** $(a+b)(a-b)(c+d)(c-d)$. **698.** $(ac+bd+bc-ad)(ac+bd-bc+ad)$. **699.** $(ac-bd+bc+ad)(ac-bd-bc-ad)$. **700.** $(a-b)(a^2+ab+b^2)$. **702.** $(a-1)(a^2+a+1)$. **703.** $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$ **705.** $(5a-2b)(25a^2+10ab+4b^2)$. **713.** $(3a+5b)(81a^4-135a^3b+225a^2b^2-375ab^3+625b^4)$. **715.** $a^2b^2(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-$

$-ab^3+b^4)$. **716.** $ax(a+x)(a^2-ax+x^2)$. **717.** $x(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$. **719.** $3a(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$. **726.** $(a-b)(a^2-ab+$ $+b^2)$. **729.** $(x+y)(x-y)^2$. **730.** $(a+b)(a-c)(c+b)$. **731.** $(a+b)^2$. $(b-a)$. **732.** $(x+1)(x^2-x+1)(ab+cd)(ab-cd)$. **733.** $(a+3)(a+1)$. **735.** $(x+5)(x+10)$. **737.** $(x+3)(x+9)$. **739.** $(a-15)(a-1)$. **741.** $(z-2)$. $(z-4)$. **743.** $(a-5)(a-6)$. **744.** $7(x-3)(x-7)$. **745** $(a-7)(a+5)$. **746.** $(a+6)(a-5)$. **747.** $(x+1)(x-4)$. **748.** $(a+10)(a-6)$. **749.** $(a+2)$. $(a-12)$. **750.** $(y+9)(y-10)$. **751.** $(2-n)(13-n)$. **752.** $(3+a)$. $(4+a)$. **753.** $(a-b)(a-4b)$. **754.** $(x+12y)(x-10y)$. **755.** $(x+1)$. $(x-1)(x+2)(x-2)$. **756.** $(a+2b)(a-2b)(a+3b)(a-3b)$. **758.** $(a-10)$. $(6-a)$. **759.** $(b+5)(2-b)$. **760.** $(x-7)(8-x)$. **761.** $(x+1)(x+3)$. $(x+4)$. **762.** $(a+1)(a+2)(a+5)$. **763.** $(a-1)(a+3)(a-4)$. **764.** $(m-1)$. $(m-2)(m+2)$. **765.** $(x-1)(x-2)(x-3)$. **766.** $a(a+1)(a-2)(a+3)$. **767.** $(x+2)(x-4)(x-5)$. **768.** $(n-1)(n-5)(n-6)(n-7)$. **769.** $(x+2)$. $(x+3)(x+4)(x+5)$. **770.** $(a^2+b)^3$. **772.** $(2x-5y)^3$. **773.** $2b(a+b)(b-a)$. **774.** $(m-n)(x+y)(x-y)$. **775.** $(a+1)^2(a^2-a+1)$. **776.** $x^{n-3}(x+1)^2$. (x^2-x+1). **778.** $(a+b)(a-b)(a+3b)(a-3b)$. **779.** $(a-1)^2(a^2+a+1)^2$. **780.** $ab^2c^3(a^2+3b^3+4c)(a^2+3b^3-4c)$. **781.** $7a^2(a+2)(a-2)(a^2+2)(a^2-2)$. (a^4+4). **782.** $(a+1)^3(a-1)^2(a^2-a+1)^2(a^2+a+1)$.

784. b. **785.** cd. **786.** $2x^3y^3$. **790.** $18a^nb^m$. **791.** $16x^5b^m$. **792.** $9a^nb^{m+1}$. **793.** $7x^{r-3}y^{p+3}z^{n-2}$. **794.** $4(x+y)$. **795.** $3a^2b^2(c-d)^2$. **796.** b. **797.** $4a^2b$. **798.** $2a^2b$. **799.** x. **800.** c^2. **802.** $6ax+x^2$. **803.** $6a+9b-5x$. **804.** $a+b$. **805.** $a-b$. **806.** $a+1$. **807.** $a+b$. **808.** $2c+3d$. **809.** a^2-2a. **810.** $a+3$. **812.** n^2+n. **813.** $a+b+c$. **814.** $x-y$. **815.** $3a-1$. **816.** a^2+4a. **817.** $x+2y$. **818.** a^2-2a. **819.** a^2-4a.

820. $48ab$. **821.** $a^2b^2c^2$. **822.** $720a^2b^6c^{12}$. **823.** $144a^4b^4xy^4$. **826.** $36a^2b^3x$. **829.** $1680abnxy$. **832.** $140a^{m+1}b^m$. **833.** $d^2xy(a+b)$. **834.** $36a^3b^2(c-g)$. **836.** a^2-b^2. **837.** $(a^3-b^3)(a+b)$. **838.** $-2a^5+2a^3b^2$. **840.** $(b-a)(a-c)(c-b)$. **841.** $2(a+b)(a+b+2)$. **842.** x^3+1. **844.** $60ax^4y^2$. $(6x+y)(x-2y)$. **845.** $(a^2-9)(a^2+1)(a+2)$. **846.** $(x-5)(x+2)(x-2)$. **847.** $(a+1)(a+2)(a+3)$.

848 $\frac{a}{b}$. **849.** $\frac{2}{a^3}$. **850.** $\frac{2a}{b^2}$. **851.** $\frac{3b}{4ax^5}$. **852.** $\frac{2a}{b^6}$. **853.** $\frac{a^2}{3b^6x^3}$. **854.** [illegible]x / $5d$. **855.** $\frac{8bx}{11az}$. **856.** $\frac{4a}{9b}$. **857.** $\frac{8b^{n-2}}{9a^{n-4}}$. **858.** $\frac{2a^2}{3c^3}$. **859.** $\frac{7}{9a^2c^{n-2}}$. **860.** $\frac{2}{3b}$. **861.** $\frac{4(a+b)}{9(a-b)}$. **862.** $\frac{8(a+b)}{11(a-b)}$. **863.** $\frac{2(a^2+b^2)}{3(x-y)}$. **864.** $\frac{a(a-y)}{b(a-x)}$. **865.** $\frac{a(a-b)^2}{b(c-d)^2}$. **866.** $\frac{2a+b}{3a+2b}$. **867.** $\frac{a+b}{c+b}$. **868.** $\frac{a+x}{2b-c}$. **869.** $\frac{a-bc^2-c^4}{3b+c}$. **870.** $\frac{b}{c}$. **871.** $\frac{7a}{5c}$. **872.** $\frac{2a^2x^3}{3b^2}$. **873.** $\frac{3a}{4b}$. **874.** $\frac{3x}{10b}$. **875.** $\frac{1}{a}$. **876.** $-\frac{4a}{9b}$. **877.** $\frac{8ax}{9bc}$. **878.** $\frac{4a^2}{5b^n}$. **879.** $\frac{c}{2df}$. **880.** $\frac{a+b}{a-b}$. **881.** $\frac{a-1}{a+1}$. **882.** $\frac{x-a}{x^2+a}$. **883.** $\frac{a+3}{a-3}$. **884.** $\frac{c+d}{f+2x}$. **885.** $\frac{3a+5b}{3c-1}$.

15

886. $\frac{x}{a+b}$. **887.** $\frac{b}{c(x+y)}$. **888.** $\frac{a^2-1}{x-y}$. **889.** $\frac{2a+1}{2a-1}$. **890.** $\frac{5a}{a-x}$.
891. $\frac{5a+10}{7a}$. **892.** $\frac{x^2y+x}{2y}$. **893.** $\frac{2x}{2x-y}$. **894.** $\frac{a^3-b^3}{4a}$. **895.** $\frac{a+1}{a-1}$.
896. $\frac{4a}{3a+2b}$. **897.** $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. **898.** $\frac{a^2+ax+x^2}{a-x}$. **899.** $\frac{n-1}{n+1}$.
900. $\frac{a+y}{a^2-y}$. **901.** $\frac{1}{x^2-y^2}$. **902.** $\frac{x-2}{x+2}$. **903.** $\frac{x+5}{x-5}$. **904.** $\frac{a+2b}{a-2b}$.
905. $\frac{a-6}{a+6}$. **906.** $\frac{x+5}{x+3}$. **907.** $\frac{5a-4}{3a-2}$. **908.** $\frac{a^2+1}{(a-1)^2}$. **909.** $\frac{n^2}{n-2}$.
910. $\frac{x-1}{x+2}$. **911.** $1+2x+3x^2$. **912.** $\frac{9x^2-3}{x+5}$. **913.** $\frac{2x^2+3x-5}{7x-5}$.
914. $\frac{2x+1}{x-2}$. **915.** $\frac{a^2b^2-abcx+c^2x^2}{ab-cx}$.

Въ задачахъ 916—942 приведены отвѣты для первыхъ дробей.

916. $\frac{ad}{bd}$. **917.** $\frac{ad^2}{b^2d^2}$. **918.** $\frac{b^2}{a^2b^2}$. **919.** $\frac{cdx}{abcd}$. **920.** $\frac{3bx}{ab^2}$.
921. $\frac{bc}{a^2b^2c^2}$. **922.** $\frac{a^3}{a^2b^2c^2}$. **923.** $\frac{45abxz^2}{240x^3y^3z^2}$. **924.** $\frac{27a^4}{72a^2b^2x^2}$.
925. $\frac{8ax}{42abx^2z}$. **926.** $\frac{6ab}{24a^3b^3n^3}$. **927.** $\frac{6bcx}{24a^2b^2c^2}$. **928.** $\frac{ab}{b}$. **929.** $\frac{ab^2}{b^2}$.
932. $\frac{1}{(a-b)^2}$. **933.** $\frac{x(a-b)}{(a+b)^3(a-b)}$. **934.** $\frac{m(a-b)}{(m-n)^2(a-b)}$. **936.** $\frac{ax^2-axy}{x^3-xy^2}$.
938. $\frac{b(x^2+x+1)}{x^3-1}$. **941.** $\frac{a(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+3)}$. **942.** $\frac{a-4}{(a+1)(a+3)(a-4)}$.
943. $\frac{ac+b}{c}$. **945.** $\frac{x^2+1}{x}$. **947.** $\frac{1}{a}$. **948.** $-\frac{x}{b}$. **949.** $\frac{a+b}{2}$. **951.** $\frac{x}{x-1}$.
954. $-\frac{b^2}{a}$. **955.** $\frac{b^2}{a}$. **956.** $\frac{x+y-2xy}{x+y}$. **958.** $\frac{b-a}{b+a}$. **959.** $\frac{a+4b}{a+b}$.
960. $\frac{a^2}{a-2}$. **961.** $\frac{ab}{a-b}$. **963.** $\frac{a^3}{a-b}$. **964.** $\frac{1}{1-a}$. **965.** $\frac{1}{1-a}$. **966.** $\frac{1}{1-a}$.
967. $a^2+\frac{b}{a}$. **968.** $x-2y+\frac{y^2}{x}$. **969.** $1-\frac{x+1}{x^2}$. **970.** $2a-3b+\frac{b^3}{a^2}$.
971. $2a+5b-\frac{b^2}{3a^2}$. **972.** $1+\frac{2b^2}{a^2-b^2}$. **974.** $a^3-a^2b+ab^2-b^3+\frac{2b^4}{a+b}$.
975. $x+9+\frac{8}{x+1}$. **976.** $\frac{a+b}{2}$. **978.** $\frac{14}{x}$. **980.** $\frac{2a+c}{2b}$.
982. $\frac{3az+4by+5cx}{xyz}$. **983.** $\frac{7c-3b-4a}{abc}$. **984.** $\frac{15bx+28acy}{48a^2b^2c^3}$.
985. $\frac{a+b-1}{(a+b)^3}$. **986.** $\frac{bc+ac+ab}{abc}$. **988.** $\frac{13a}{12x}$. **990.** a, b. **991.** $\frac{2a}{b}$, $\frac{2y}{b}$.
992. $\frac{11a^2b-7ab^2}{4xy^2}$. **993.** $\frac{3ac-bc-ab}{abc}$. **994.** $\frac{13xz-9yz-18xy}{xyz}$.

995. $\frac{19y-x}{4}$. 996. $\frac{69nb-15ab+70an}{60abn}$. 997. $\frac{31bc+8ac-92ab}{24ab}$.

998. $\frac{8ac+bc+11ab}{4abc}$. 999. $\frac{a-7b}{6ab}$. 1000. $\frac{12b^2-49a^2}{4b}$.

1001. $\frac{4a^2+64ac+c^2}{5c}$. 1002. $\frac{120ab-73ac-20bc}{20}$. 1003. $\frac{5a-7b}{6}$.

1004. $\frac{x}{ab}$. 1005. $\frac{1}{ab}$. 1006. $\frac{a+ab-b^2}{a^2-b^2}$. 1007. $\frac{a^2+a-b}{a^2-1}$.

1008. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$. 1009. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$. 1010. $\frac{2-3a-a^2}{4-a^2}$. 1012. $\frac{4ab}{a^2-b^2}$.

1013. $\frac{8bx^2+(8b^2+4a-c)x-bc}{4x(b+x)}$. 1015. 1.

1016. $\frac{2x^2y^2}{3y^4-x^4}$. 1017. $\frac{3x^4-2x^3+2x^2-1}{1-x^4}$. 1018. $\frac{a^3-4a^2x-11ax^2-2x^3}{2x(a^2-x^2)}$.

1019. $\frac{3az-a^2-z^2}{a^2-z^2}$. 1020. $\frac{ac^2+abd-2bdy}{c(a^2-4y^2)}$. 1021. $\frac{a^3+ab^2+b^3}{(a+b)^3}$.

1022. $\frac{2x^4+13a^2x^2-2a^3x-a^4}{(a^2-x^2)^2}$. 1023. $\frac{12a-67b}{6a-33b}$. 1026. $\frac{26y^2+4y-8}{9y^2-1}$.

1027. $\frac{m-z-1}{m(1-z^2)}$. 1029. $\frac{2+x+3x^2}{2(1-x^4)}$. 1030. $\frac{x^2-4x+9}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

1032. $\frac{8x(x^2+1)}{x^4-10x^2+9}$. 1033. $\frac{x}{(2x-1)(3x-2)(5x-3)}$.

1035. $\frac{x^2+x-5}{(1+x)(2+x)(3-x)}$. 1036. $\frac{20hx-22x^2}{(h+x)(h-2x)^2}$. 1037. $\frac{x-c}{a-c}$.

1039. $\frac{1}{x^5(x^2-1)}$. 1040. $x(a+b)-ab$. 1041. $\frac{a+2}{a-2b}$. 1042. $\frac{2-a}{2b-a}$.

1043. $\frac{1}{3(a^2-b^2)}$. 1045. $\frac{p}{(m-p)(p-n)}$. 1046. $\frac{2}{(a-5)(a+3)}$.

1047. $\frac{xy+16}{(x-4)(x+3)(y+4)}$. 1049. 0. 1050. $\frac{1}{(a-b)(c-b)}$. 1051. 1.

1052. 0. 1053. 0. 1054 0. 1056. $\frac{8b}{15a^6}$. 1057. $\frac{6x^2}{5a}$. 1058. $\frac{3x}{4a^4}$. 1059. $\frac{b^3}{y^4}$.

1060. $-\frac{2am^3}{15b^3n^3}$. 1061. $\frac{mb^{n-4}}{4na^{m+2}}$. 1062. $\frac{3x^{n-2}z^n}{5a^2c^{n-1}}$. 1063. $\frac{8a^6}{27b^9}$. 1064. $\frac{5ab}{4}$.

1065. $\frac{b}{a+b}$. 1066. $\frac{c}{a-b}$. 1067. $\frac{a-b}{x^7}$. 1068. $\frac{ab(a-b)}{3(x-y)^2}$. 1069. $\frac{5}{9}c$.

1070. $\frac{2am^3}{5b^3x^5}$. 1071. $\frac{3ax^2}{4b^5}+\frac{9x^5}{5a^3}-\frac{2}{ab^4}$. 1072. $\frac{4b}{5}-\frac{36b^9}{125a^{11}}+\frac{1}{5a^2}$. 1073. $\frac{ac}{a+b}$.

1074. $\frac{b-1}{a-1}$. 1075. $\frac{a-b}{2a}$. 1076. $\frac{a+b}{a-b}$. 1077. $\frac{a^2+b^2}{b}$. 1078. $\frac{2(a-b)}{a}$.

1079. $\frac{5a^2}{6b^2}-\frac{2b^2}{15a^2}$. 1082. $\frac{1-a}{x}$. 1083. $-\frac{a}{b^2}$. 1084. $4(1+x)$. 1086. $\frac{15a^5m}{2b^5n}$.

1087. $\frac{2xy}{7ab}$. 1088. $-\frac{14x^2}{3a^3}$. 1089. $\frac{6bny}{5ax}$. 1090. $\frac{7}{8}a^2b^2$. 1092. $\frac{a+b}{b}$.

1093. $c(1-x)$. **1094.** $\frac{x^3}{a(a-b)}$. **1095.** $\frac{9(a+b)^2(x+y)^2}{4ab^2}$.

1097. $\frac{4y^2}{5b^2}-\frac{8y^2}{9ab}+\frac{4y^3}{9a^2x}$. **1099.** $\frac{b}{a+b}$. **1100.** $\frac{1}{ab(a^2+a+1)}$. **1101.** $\frac{a+b}{a}$.

1102. $\frac{a}{a^2-b^2}$. **1103.** $\frac{b(1+a^2)}{1+a}$. **1104.** $\frac{a^2-1}{(a+2)(a-3)}$. **1105.** $\frac{a^2-7a+10}{a^2+3a+2}$.

1106. $\frac{a^4-1}{a^2}$. **1107.** $\frac{a^2+1}{a}$. **1108.** $\frac{a^2+a+1}{a}$. **1111.** $\frac{a-b}{a+b}$. **1112.** 1.

1113. $\frac{x^2+y^2}{2xy}$. **1114.** $\frac{ax-by}{ax+by}$. **1115.** $\frac{x^2(3a^2+x^2)}{(a^2+x^2)^2}$. **1116.** $\frac{(a^2+x^2)^2}{a^4+x^4}$.

1117. $\frac{a^2+ax+x^2}{a^2-ax+x^2}$. **1118.** $\frac{a^4+a^2x^2+x^4}{ax(a-x)^2}$. **1119.** $\frac{4ab^3}{a^4-b^4}$. **1120.** $\frac{(a^2+1)^2}{4a^2}$.

1121. $\frac{a+b}{b}$. **1122.** $\frac{2aby}{b^2-x^2y^2}$. **1123.** $\frac{a(a^2-3a+2)}{3a^2-6a+2}$. **1124.** $\frac{a+b}{ax}$.

1125. $\frac{b(a^2+1)}{b^2+1}$. **1126.** $\frac{1}{1-b^2}$. **1127.** $\frac{ac+bc-ab}{ac+bc+ab}$. **1128.** $\frac{b^2+b+1}{b}$.

1129. $\frac{4ab^3}{a^4-b^4}$. **1130.** $\frac{a+1}{a-2}$. **1131.** $\frac{128c}{9a}$. **1132.** $\frac{2a(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$. **1133.** $\frac{49a}{40d}$.

1134. $\frac{x}{2}$. **1135.** $\frac{y(x+y)(x-1)}{x(x^2+xy+y^2)}$. **1138.** $\frac{a}{b}$. **1139.** 1.

1144. $(a+1)^2-a^2=2a+1$. **1145.** $(2a+1)^2-(2a-1)^2=8a$.

1146. $(2a+2)^2-(2a)^2=4(2a+1)$. **1149.** $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$.

1151. $a+(a+1)+(a+2)=3(a+1)$.

1152. $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$. **1153.** $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{27}$, -64. **1155.** a^2b^{-2}. **1157.** $a(a+b)^{-1}$.
1158. b^2a^{-2}. **1159.** $20a^{-9}$. **1160.** x^{-4}. **1161.** $56a^{-9}b^2$. **1162.** 1. **1163.** a^{19}.
1164. $3a^2$. **1165.** $2x^{m+n}$. **1166.** a^{3-n}. **1167.** a^2. **1168.** $-84a^{-2}b^3$.

1169. $\frac{4a^2}{b^2}$. **1171.** $\frac{2b}{9a^2}$. **1172.** $\frac{4bc^2x}{5a^3}$. **1173.** $\frac{2bx(a-x)^2}{3(a+x)}$. **1174.** $\frac{5c^3x^{n+2}}{6a^2b^{n-m}}$.

1175. $\frac{8ab^4}{3}$. **1176.** $\frac{3a^2}{10x^4y^2}$. **1178.** $\frac{16a^5(x+y)}{21b^3(a-1)}$. **1179.** $\frac{x^4t^4}{15ab^{n+3}z}$.

1180. $\frac{a^6d^{12}y^6}{100n^{20}}$. **1181.** 4. **1182.** 8. **1183.** 5. **1184.** 4. **1185.** 3. **1186.** 4.

1187. 1. **1188.** 9. **1189.** 3. **1190.** 0. **1191.** 3. **1192.** 3 **1193.** 28.
1194. $5/9$. **1195.** 25. **1196.** 6. **1197.** 10. **1198.** 7. **1199.** 5. **1200.** 9.
1201. -1. **1202.** 4. **1203.** $1/3$ **1204.** 3. **1205.** 10. **1206.** 2.
1207. 1. **1208.** 1. **1209.** 1. **1210.** 17. **1211.** -6. **1212.** 6.
1213. 7. **1214.** $1/13$. **1215.** 18. **1216.** 5. **1217.** 4. **1218.** 100.
1219. 10. **1220.** 17. **1221.** 13. **1222.** 10. **1223.** 11. **1224.** 5.
1225. 8. **1226.** 3. **1227.** 0. **1228.** 1. **1229.** 11. **1230.** 2.
1231. 7. **1232.** $1\frac{2}{5}$, **1233.** $\frac{29}{41}$. **1234.** 0. **1235.** $b-a$. **1236** $a-b$.

1237. $\frac{b}{a}$. **1238.** $\frac{n+p}{m}$. **1239.** $\frac{a+b+c}{m}$. **1240.** $a-b$.

1241. $b+\frac{c}{a}$. **1242.** $4a+5b$. **1243.** a. **1244.** b. **1245.** $\frac{a}{m+n}$.

1246. $\frac{a+d}{b+c}$. **1247.** $\frac{m}{a+1}$. **1248.** $\frac{a}{b+c-1}$. **1249.** $\frac{b}{a-1}$.
1250. $\frac{m}{a+b+c}$. **1251.** $\frac{c+d}{a-c}$. **1252.** $\frac{ab}{c+d}$ **1253.** $\frac{bc}{a+c}$.
1254. $\frac{2ab}{2a-3b.}$ **1255.** $\frac{b+c}{a}$. **1256.** $\frac{a+c}{b}$. **1257.** $\frac{ab}{a+b}$.
1258. $\frac{a+b}{a+1}$. **1259.** 1 **1260.** a. **1261.** a. **1262.** ab.
1263. $a(b+c)$. **1264.** $\frac{a}{b+c}$. **1265.** $\frac{a-b}{c}$. **1266.** $\frac{b-a}{8}$.
1267. $\frac{a}{b-1}$. **1268.** $\frac{abc}{a+b}$. **1269.** $\frac{a^2+b^2}{a+b}$. **1270.** $\frac{ab(n-m)}{a-b}$.
1271. 0. **1272.** $\frac{2a}{c+d}$. **1273.** $\frac{a-b}{a+b}$. **1274.** $\frac{a(m+1)}{m-1}$.
1275. $a-b$. **1276.** 0. **1277.** $\frac{a}{b}$. **1278.** 1. **1279.** 0.
1280. $\frac{a}{m+n}-b$. **1281.** $\frac{an+bm}{cmn}$. **1282.** $\frac{abcd}{ab+ac+bc}$.
1283. $\frac{bdgh}{adg+bcg+bdf}$. **1284.** $\frac{a^2+b^2}{a+b}$. **1285.** b. **1286.** 1. **1287.** 0.
1288. 0. **1289.** b. **1290.** 0. **1291.** $\frac{2ab}{a+b}$. **1292.** 1. **1293.** 0.
1294. abc. **1295.** $\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$. **1296.** $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$.
1297. $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}$. **1298.** ab. **1299.** $-\frac{1}{6}$. **1300.** 0. **1301.** 6. **1302.** 1.
1303. 1. **1304.** 3. **1305.** $\frac{ap-cm}{an-bm}$. **1306.** 5. **1307.** 30. **1308.** 2.
1309. 1. **1310.** 10. **1311.** $b-1$. **1312.** 1. **1313.** 17. **1314.** 19. **1315.** 22.
1316. 33. **1317.** 23. **1318.** 100. **1319.** 7. **1320.** 3. **1321.** 10. **1322.** 11.
1323. 9. **1324.** 2. **1325.** 7. **1326.** 4. **1327.** 10. **1328.** 22. **1329.** 33.
1330. 99. **1331.** 11. **1332.** 17. **1333.** 100. **1334.** 111. **1335.** 13. **1336.** 11.
1337. 7. **1338.** 10. **1339.** 0. **1340.** $2\frac{1}{8}$. **1341.** $3\frac{2}{7}$. **1342.** 7. **1343.** 10.
1344. a^2-b^2. **1345.** a^2-b^2. **1346.** a^2b^2+a+b. **1347.** a.
1348. $a+b$. **1349.** $2a+3b$. **1350.** $a+b+c$. **1351.** $a+b+c$.
1352. $\frac{a+c}{a^2+ac+c^2}$. **1353.** $\frac{ab}{b-c}$. **1354.** $\frac{b}{a+b}$. **1355.** $\frac{(an+cm)pq}{an^2p+cm^2q}$.
1356. $\frac{an+bm-2mn}{a+b-m-n}$. **1357.** $\frac{(a+c)mn+bn+dm}{am+cn+b+d}$. **1358.** $\frac{ab-mn}{a+b-m-n}$.
1359. $\frac{ad(b+c)}{bc(a+d)}$. **1360.** $\frac{ab(a+b)}{cd(c+d)}$. **1361.** $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$.
1362. $\frac{3a+2b}{2a+3b}$. **1363.** $\frac{a-2b}{2a-b}$. **1364.** $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. **1365.** b.
1366. $a+b$. **1367.** $\frac{ab}{a+b}$. **1368.** $\frac{ab}{a+b}$. **1369.** $\frac{(a-b)c}{a+b}$.

1370. $\frac{a^2+b^2}{a+b}$. **1371.** $\frac{pq(an+bm)+mn(cq+dp)}{p^2(an+bm)+m^2(cq+dp)}$.

1372. $-\frac{(m-n)bc+(n-p)ac+(p-m)ab}{(m-n)a+(n-p)b+(p-m)c}$. **1373.** См. отв. 1372.

1374. $\frac{2a-3b}{3a-2b}$. **1375.** $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$. **1376.** $\frac{ab}{a+b}$. **1377.** $\frac{2a(3a-2c)}{5a-3c}$.

1378. $\frac{5a(2b-a)}{3c-d}$. **1379.** $ab+ac+bc$. **1380.** $a+b+c$. **1381.** $a+b+c$.

1382. $a+b+c$. **1383.** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. **1384.** $a^2+b^2-c^2$. **1385.** $a+b+c$.

1386. 300. **1387.** 160. **1388.** $\frac{4}{5}$. **1389.** 21. **1390.** 9. **1391.** 71.

1392. 960. **1393.** 315. **1394.** 537. **1395.** 30. **1396.** $49\frac{1}{3}$. **1397.** 9. **1398.** 65. **1399.** 9. **1400.** 20. **1401.** 52 р., 80 к. **1402.** 48000. **1403.** 34650. **1404.** 1440. **1405.** 180. **1406.** 220. **1407.** 630. **1408.** 721. **1409.** 6510. **1410.** 121600. **1411.** 40000. **1412.** 32000. **1413.** 800. **1414.** 5. **1415.** 5. **1416.** 260. **1417.** 7%. **1418.** 3200. **1419.** 6%. **1420.** 4. **1421.** 16. **1422.** 9. **1423.** 100. **1424.** 112. **1425.** 36. **1426.** 25. **1427.** 39. **1428.** 13. **1429.** $138\frac{2}{3}$ и $17\frac{1}{3}$. **1430.** 155 и 465. **1431.** 33 и 39. **1432.** $61\frac{1}{59}$ и $1\frac{1}{59}$. **1433.** 2 п., 22 ф. и 1 п., 38 ф. **1434.** 12000 и 12500. **1435.** 20000 и 2000. **1436.** 70 и 14. **1437.** 180 и 60. **1438.** 78 и 122. **1439.** 24 и 16. **1440.** 43 и 17. **1441.** 6 ч., 24 м. **1442.** 48 м. **1443.** 24 ч. **1444.** 12. **1445.** 175 и 105. **1446.** 20 и 15. **1447.** 28 и 9. **1448.** 36 и 24. **1449.** 20 и 28. **1450.** 18 и 54. **1451.** $6\frac{1}{4}$. **1452.** 35. **1453.** 45. **1454.** 20. **1455.** 25. **1456.** 12. **1457.** 74. **1458.** 28. **1459.** 49. **1460.** 48 и 36. **1461.** 8. **1462.** 3. **1463.** $6\frac{6}{7}$. **1464.** 3. **1465.** 22,5. **1466.** 24. **1467.** 24. **1468.** 360. **1469.** 420. **1470.** $8\frac{4}{7}$. **1471.** Въ 1 ч., $5\frac{5}{11}$ м.; 11 разъ. **1472.** 7 ч., $\frac{5}{11}$ м. **1473.** 24. **1474.** 600 и 80, 250, 270. **1475.** 16000; 4; 4000. **1476.** 20000; 4. **1477.** 36 и 28. **1478.** 81 и 16. **1479.** 35. **1480.** 47. **1481.** 5 и 20. **1482.** 30 и 10. **1483.** 17. **1484.** $51\frac{1}{8}$.

1485. 6,4. **1486.** 15,42. **1487.** $\frac{na}{n-1}$. **1488.** $\frac{a}{b-1}$.

1489. $\frac{amn}{mn-m-n}$. **1490.** $\frac{amnp}{mnp-mn+mp-np}$. **1491.** $\frac{100a}{pt}$.

1492. $\frac{100amn}{np+mp_1+(mn-m-n)p_2}$. **1493.** $\frac{apt}{1200}$. **1495.** $\frac{a-bn}{c(n-1)}$.

1496. $\frac{p+ab}{m+b}$. **1497.** $\frac{a}{n+1}$. **1499.** $\frac{ma(n-1)}{2mn-m-n}$. **1500.** $\frac{b+ak_1n}{km+k_1n}$.

1501. $\frac{d}{v+v_1}$. **1502.** $\frac{a}{v_1-v_2}$. **1503.** $\frac{s(c-b)}{(a-b)}$. **1505.** $\frac{(a+b)(b_1-a_1)}{a-b}$.

1506. $3a$. **1508.** $\frac{nvv_1}{v_1-v}$. **1509.** $\frac{abc}{ab+ac-bc}$. **1510.** $\frac{c_1+c}{a_1-a}$.

1511. $\frac{a^2+b^2}{2a}$ и $\frac{a^2-b^2}{2a}$. **1512.** $\frac{a^2-b^2}{2b}$. **1514.** $b^2+(p-b-x)^2=x^2$;

откуда $x = \frac{b^2+(p-b)^2}{2(p-b)}$. **1515.** Обозначимъ гипотенузу черезъ x, одинъ катетъ черезъ a и другой черезъ b. Тогда $p - x = a + b$ и $(p-x)^2 = (a+b)^2$, или $p^2 - 2px + x^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Но $a^2 + b^2 = x^2$; слѣдовательно, $p^2 - 2px = 2ab$. Площадь треугольника равна или $\frac{ab}{2}$ или $\frac{xh}{2}$; слѣдовательно, $2ab = 2xh$. Поэтому, $p^2 - 2px = 2hx$; отсюда $x = \frac{p^2}{2(p+h)}$. **1516.** 250, 97. **1517.** 83, 98. **1518.** 21, 10. **1519.** 10, 19. **1520.** 17, 13. **1521.** 71, 14. **1522.** 9, 7. **1523.** 10, 10. **1524.** $\frac{1}{2}$, 0. **1525.** $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$. **1526.** 191, —71. **1527.** 2, —3. **1528.** 11,55. **1529.** 57,19. **1530.** 14, 16. **1531.** 6, 5. **1532.** 7, 9. **1533.** 2, 1. **1534.** 8, 1. **1535.** 9, 5. **1536.** $-10\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$. **1537.** —1, $\frac{1}{2}$. **1538.** $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$. **1539.** —2, —3. **1540.** $-\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$. **1541.** 11, 10. **1542.** $-\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$. **1543.** 12, 8. **1544.** 12, 4. **1545.** 7, 6. **1546.** 8, 9. **1547.** 10, 12. **1548.** 2, 3. **1549.** 3, 4. **1550.** 0,8, 0,9. **1551.** $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{7}$. **1552.** 3, 1. **1553.** 7, 8. **1554.** 11, 7. **1555.** 17, 13. **1556.** 5, —4. **1557.** —7, —3, **1558.** 11, 10. **1559.** 0,7, 0,9. **1560.** 13, 10. **1561.** 4,4, 3,3. **1562.** 9,99, 7,77. **1563** 7,3, 3,7. **1564.** $1\frac{8}{25}, \frac{18}{25}$. **1565.** 7, 5. **1566.** $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$. **1567.** $\frac{3}{2}(a+b)$, $a+b$. **1568.** $a+b$, $a-b$. **1569.** $2a-3b$, $3a-2b$. **1570.** $\frac{1}{2}(a+b)$, $\frac{1}{2}(a-b)$. **1571.** $7a-5b$, $5a-7b$. **1572.** $\frac{a+1}{ab-1}$, $\frac{b+1}{ab-1}$. **1573.** $\frac{a(c-d)}{ad-bc}$, $\frac{b(c-d)}{ad-bc}$. **1574.** $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a-b}{c}$. **1575.** $\frac{ab-1}{(a-1)(b-1)}$, $\frac{a-b}{(a-1)(b-1)}$. **1576.** См. отв. 1572. **1577.** $\frac{(a+1)(b+1)}{ab-1}$, $\frac{b-a}{ab-1}$. **1578.** $a+c$, $b+c$. **1579.** $a+b-c$. **1580.** $a(a+b)$, $b(a-b)$. **1582.** 20, 17, 5. **1583.** $\frac{1}{2}(b+c-a)$. **1584.** 3, 2, 1. **1585.** 1,7, 1,8, 1,9. **1586.** 1,7, 1,5, 1,3. **1587.** 11, 7, 9. **1588.** 28, 32, 40. **1589.** 12, 16, 8. **1590.** 21, 22, 23. **1591.** 50, 31, 19. **1592.** 15, 12, 10. **1593.** $\frac{1}{2}(b+c)$. **1594.** 55, 33, 11. **1595.** $\frac{am}{a+b+c}$. **1596.** 9,9, 9,8, 6,3. **1597.** $\frac{mpr}{amp+bnp+cnq}$. **1598.** 5, 3, 1. **1599.** $\frac{5}{6}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$. **1600.** 3, 5, 7. **1601.** 11, 13, 17. **1602.** 5, 3, 1. **1603.** 9, 7, 3. **1604.** $7\frac{1}{4}$, $8\frac{1}{4}$, $9\frac{1}{4}$. **1605.** $3\frac{1}{7}$, $2\frac{1}{7}$, $1\frac{1}{7}$. **1606.** $\frac{1}{14}(2a+b-c)$, $\frac{1}{14}(2b+c-a)$, $\frac{1}{14}(2c+a-b)$. **1607.** $\frac{1}{38}(a-2b+3c)$, $\frac{1}{38}(b-2c+3a)$, $\frac{1}{38}(c-2a+3b)$. **1608.** Несовм. **1609.** 2,3, 3,4, 4,5. **1610.** 20, 30, 40. **1611.** 30, 20, 70. **1612.** 10, 9, 8. **1613.** 20, 21, 22. **1914.** 5, 2, 0. **1615.** 1, 1, 1. **1616.** 11,9, 7. **1617.** 5, 3, 1. **1618.** $\frac{1}{b+c-a}$. **1619.** $\frac{bc}{b+c}$. **1620.** 2, 3, 1. **1621.** 3, 4, 5. **1622.** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. **1623.** 5, 4,3. **1624.** 7, 3, 1. **1625.** 2, 3, 1. **1626.** 1, 3, 5. **1627.** 0, 1, 2, 3. **1628.** 5, 4, 1, 3. **1629.** 4,4, 3,3, 2,2, 1,1. **1630.** 21, 31, 41, 51. **1631.** 1, 3, 4, 2. **1632.** $8\frac{1}{2}$, 7, $4\frac{1}{2}$, 4. **1633.** 6, 12, 15, 18. **1634.** 4, 6, 2, 1. **1635.** $\frac{1}{24}(3a-2b+c)$, $\frac{1}{24}(3b-2c+d)$. **1636.** $\frac{1}{40}(4a-3b+2c-d)$,

$\frac{1}{40}(4b-3c+2d-a)$. **1637**. 4, 5, 1, 2, 3. **1638**. $\frac{1}{2}(a-b+c-d+e)$, $\frac{1}{2}(b-c+d-e+a)$. **1639**. 2, 1, 0, 3, 4. **1640**. 6, 5, 4, 3, 2. **1641**. $a+d-s$, $b+e-s$, $c+a-s$, $d+b-s$, $e+c-s$, при чемъ $s=\frac{1}{3}(a+b+c+d+e)$. **1642**. $b+c-e$, $c+d-a$, $d+e-b$. **1643**. $b-c+d$, $c-d+e$. **1644**. $\frac{1}{11}(4a+b+3c-2d+5e)$, $\frac{1}{11}(4b+c+3d-2e+5a)$. **1645**. $s-a$, $s-b$, при чемъ $s=\frac{1}{4}(a+b+c+d+e)$. **1646**. $\frac{1}{22}(5a+3b-$ $-7c+9d+e$, $\frac{1}{22}(5b+3c-7d+9e+a)$. **1647**. $\frac{1}{2}(s-a)$, $\frac{1}{2}(s-b)$, при чемъ $s=\frac{1}{3}(a+b+c+d+e)$. **1648**. $\frac{1}{2}(a+d)$, $\frac{1}{2}(b+e)$, $\frac{1}{2}(a+c)$, $\frac{1}{2}(d+b)$, $\frac{1}{2}(e+c)$. **1649**. $a+b+c$, $b+c+d$, $c+d+e$. **1650**. ,5, 4, 3, 2, 1. **1651**. 457, 355. **1652**. 211, 537. **1653**. 420, 60. **1654**. 500, 580. **1655**. 30 и 360. **1656**. 410, 1740. **1657**. 4, 6. **1658**. 10, 3. **1659**. 80, 100. **1660**. 60, 40. **1661**. 53, 41. **1662**. 70, 280. **1663**. 60, 120. **1664**. 200, 160. **1665**. $\frac{7}{25}$. **1666**. $\frac{8}{35}$. **1667**. 209. **1668**. 615. **1669**. 60, 15. **1670**. 45, 10. **1671**. 375, 300. **1672**. 600, 1000. **1673**. 52, 28. **1674**. 58. **1675**. 38. **1676**. 73. **1677**. 12000, 4000. **1678**. 750, 450. **1679**. 7000 р., 6 %. **1680**. 3 р., 1 р., 80 к. **1681**. Изъ первой бочки взяли x ведеръ, а изъ второй y. Тогда $x+y=32$. На одно ведро смѣси въ первой бочкѣ приходилось $\frac{20}{50}$ ведеръ чистаго спирту и $\frac{30}{50}$ воды; въ другой же бочкѣ $\frac{30}{100}$ спирту и $\frac{70}{100}$ воды. Слѣдовательно, въ новой смѣси было спирту $\frac{20x}{50}+\frac{30y}{100}$, воды $\frac{30x}{50}+\frac{70y}{100}$. Изъ условія задачи имѣемъ новое уравненіе, $\left(\frac{20x}{50}+\frac{30y}{100}\right):\left(\frac{30x}{50}+\frac{70y}{100}\right)=3:5$. Откуда $x=24$, $y=8$. **1682**. $37\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{2}$. **1683**. 4, 12. **1684**. 30, 26. **1685**. 60, 40. **1686**. Разстояніе между A и K $=x$, первоначальная скорость y. Поѣздъ долженъ прибыть въ K въ $\frac{x}{y}$ часовъ; но онъ на проѣздъ употребилъ $2+\frac{x-2y}{\frac{4}{5}y}$ часовъ и на остановку 1 часъ; слѣдовательно, имѣемъ уравненіе: $2+\frac{x-2y}{\frac{4}{5}y}+1=\frac{x}{y}+5$. Если бы остановка произошла на 400 верстъ далѣе, то получили бы уравненіе: $2+\frac{400}{y}+\frac{x-2y-400}{\frac{4}{5}y}+1=\frac{x}{y}+3$. Откуда $x=900$, $y=50$. **1687**. 100, 25. **1688**. $\frac{126}{x+y}+\frac{36}{x-y}=10$ и $\frac{90}{x+y}+$ $+\frac{60}{x-y}=10$; $x=15$, $y=3$. **1689**. 11, 9. **1690**. 10, 14. **1691**. 24, 4. **1692**. 25, 12. **1693**. 9, 4. **1694**. 1200 р., 6 %. **1695**. 2 ч.; 1 ч., 40 м. **1696**. 24, 18. **1697**. 56, 40. **1698**. 162, 136. **1699**. 144, 36, 150. **1700**. 200, 300, 120, 100. **1701**. 2,5, 2, 1,5. **1702**. 9, 8, 11. **1703**. 10, 12, 17. **1704**. 50. **1705**. 1 р., 80 к.; 80 к.; 1 р., 50 к. **1706**. 8, 5, 18. **1707**. 38, 17, 4. **1708**. 60, 70, 35. **1709**. 70, 50, 90. **1710**. 751. **1711**. 27000. **1712**. 256, 320, 180. **1713**. 6000, 8000, 10000. **1714**. 35. **1715**. 5, 6, 8. **1716**. 60, 40,

120. **1717**. 36, 32, 40. **1718**. 15, 30, $26\frac{1}{4}$. **1719**. 78, 42, 24. **1720**. 99, 51, 27, 15.

1721. $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$. **1722**. $\frac{a}{mn+1}$, $\frac{anm}{mn+1}$.

1723. $\frac{cb_1-c_1b}{ab_1-a_1b}$. **1724**. $\frac{dm-bn}{ad-bc}$, $\frac{cm-an}{ad-bc}$. **1725**. $\frac{a_1(c_1+bc)}{aa_1b-1}$, $\frac{b(c+aa_1c_1)}{aa_1b-1}$. **1727**. $\frac{nk(1-k_1)+mk_1(1-k)}{k_1-k}$. **1728**. $\frac{100b-ap_1}{p-p_1}$.

1729. $\frac{an_1(m+n)-bn(m_1+n_1)}{mn_1-m_1n}$. **1730**. $\frac{s(m+n)(aq-bp)}{(a+b)(mq-np)}$, $\frac{s(p+q)(bm-an)}{(a+b)(mq-np)}$. **1731**. $\frac{d(p+q-n)}{mp+mq+np}$. **1732**. $\frac{m(a+b)}{2ab}$.

1733. $\frac{(ad-bc)(a-b-c+d)}{2m(a-c)(d-b)}$. **1734**. $\frac{r(a-kk_1)-k(b+rr_1)}{k_1r-kr_1}$.

1735. $\frac{a-b}{4m}+\frac{am}{a-b}$. **1736**. $\frac{mn(a^2-b^2)}{an-bm}$. **1737**. $\frac{m(a+b)}{2(m+1)}$, $\frac{a+b}{2(m+1)}$, $\frac{a-b}{2}$. **1738**. $\frac{b+c}{2}$. **1740**. $\frac{amp}{pm-pn+qn}$.

1741. $\frac{2abc}{ab+bc+ac}$, $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$, $\frac{2abc}{ab+bc-ac}$. **1742**. $2\frac{17}{32}a$, $1\frac{9}{32}a$, $\frac{21}{32}a$, $\frac{11}{32}a$, $\frac{3}{16}a$. **1763**. $2a$. **1764**. 2. **1765**. 2. **1766**. 1,6. **1767**. $\frac{1}{2x}$.

1768. 0,1. **1769**. 0. **1770**. 0. **1771**. $2a^2$. **1772**. $4a^3$. **1773**. $x>2$. **1774**. $x>11$. **1775**. $x<3\frac{1}{9}$. **1776**. $x<-2$. **1777**. $x<14$. **1778**. $x<4$. **1779**. $x<4$. **1780**. $x>1$. **1781**. $x>11$. **1782**. $x<7$. **1783**. $x>\frac{10}{17}$. **1784**. $x>-1$. **1785**. 10, 11, 12. **1786**. 1, ... 19. **1787**. $x<-27$. **1788**. 5. **1789**. 5, 6 ... **1790**. 3,4. **1791**. $8a-15>0$; откуда $a>1\frac{7}{8}$. **1792**. $a<1\frac{2}{3}$. **1793**. $4-3a>0$ и $2a+15>0$; откуда $a<1\frac{1}{3}$ и $a>-7\frac{1}{2}$. **1794**. $a>\frac{2}{3}$. **1795**. Невозможная. **1796**. $a<\frac{3}{4}$. **1797**. $x<65$. **1798**. Числитель <3. **1799**. Числитель >12 и <24. **1800**. Невозможная. **1801**. Дробь увеличивается, когда $a<b$. Это видно изъ неравенства $\frac{a+x}{b+x}>\frac{a}{b}$. **1802**. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}$. Но $(a-b)^2>0$ или $a^2+b^2>2ab$; слѣдоват., $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$. **1803**. $x=7+3t$, $y=1-2t$.

1804. $1-3t$, $22+4t$. **1805**. $11t$, $6t$. **1807**. $2+9t$, $1+5t$. **1808**. $3t$, $16t-15$. **1809**. $10+15t$, $5-13t$. **1810**. $2+5t$, $1+4t$. **1811**. $30-6t$, $7t$. **1812**. $x=48-5y$. **1813**. Невозможная. **1814**. $3+55t$, $2-6t$. **1815**. Невозможная. **1816**. Невозможная. **1817**. $3+17t$, $5-25t$. **1818**. $x=1$; 10; 19. **1819**. Невозможная. **1820**. 8; 10. **1821**. $y=4$; 12. **1822**. Невозможная. **1823**. $x=1$ (4 рѣшен.). **1824**. $x=2$. **1825**. $x=4$; 9,... **1826**. Невозможная. **1827**. $x=4$; 27 ... **1828**. 4; 18 ... **1829**. Невозможная. **1830**. $x=2$; 4 ... **1831**. Невозможная. **1832**. $x=13$; 26 ... **1833**. Невозможная. **1834**. $x=1$; $y=3$. **1835**. Невозможная. **1836**. $3+t$; $1+t$. **1837**. $2-22t$; $3+15t$. **1838**. $13-8t_1$; $1+5t_1$. **1839**. $x=6+7t_1$; $y=21-8t_1$; $z=6t_1-2$. **1840**. $127-63t_1$; $70t_1-20$; $11-30t_1$. **1841**. $20t_1-5$; $15t_1-4$; $9t_1+2$. **1842**. $2+121t_2$, $1+66t_2$, $10-36t_2$.

1843. $t-4$, $16-2t$, t. **1844.** $7+3t$, $8+18t$, $9-13t$. **1845.** $41-5t$, t, $15-t$. **1846.** Невозможная. **1847.** $1-77t$, $2+10t$, $3+19t$, $4+31t$. **1848.** 6 и 4. **1849.** 1 и 552 (10 рѣшен.). **1850.** $12t-1$, $11t-1$. **1851.** $27t$ и $13t$. **1852.** Нѣтъ цѣл. рѣшен. **1853.** Числитель $= 7t+2$, знаменатель $= 8t-2$. **1854.** $\frac{8}{19}$. **1855.** $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{9}$. **1856.** Невозможная. **1857.** 4 и 2. **1858.** 42 и 4 (14 рѣшен.). **1860.** 3 и 30 или 7 и 5. **1861.** 1 и 36 (3 рѣшен.). **1862.** 6 и 10 (3 рѣшен.). **1863.** 1 и 22 (5 рѣшен.). **1864.** 6 способ. **1865.** 3 и 5. **1866.** 11 и 7,... **1868.** Невозможная. **1869.** 44 и 62 (2 рѣшен.). **1870.** 20 и 8 (2 рѣшен.). **1871.** $36t-1$. **1872.** $377t+2$. **1873.** 112. **1874.** 35 и 40. **1875.** 2 р., 50 к. **1876.** 320 (3 рѣшен.). **1877.** $x=2+5t$. **1878.** $x=1$; 4; 7. **1880.** Невозможная. **1881.** $x=3$. **1888.** 1, 35, 3 (18 рѣшен.). **1889.** 2, 23, 8 (8 рѣш.). **1890.** 20, 10, 5. **1891.** 5, 51, 244 (6 рѣш.). **1892.** 42, 10, 14 (3 рѣш.). **1893.** 18, 30, 20. **1894.** Двумя. **1895.** 10, 7, 2 (3 рѣш.). **1896.** 8, 2, 26 (5 рѣш.). **1897.** 1, 19, 26 (3 рѣш.). **1898.** 31, 10, 7 (3 рѣш.). **1899.** 138. **1900.** $693t_2+2$. **1905**, 26, 6, 31, 1 (9 рѣш.). **1906.** 162, 82, 42, 22, 12 (2 рѣш.).

Замѣченныя опечатки.

					Напечатано:	Должно быть:
Страница	14,	9	строка	снизу:	ссдержащее . . .	содержащее
„	165,	23	„	„	второю	вторую
„	193,	4	„	„	по *a*	по *a*,
„	198,	13	„	сверху:	проѣзжаеть . . .	проѣзжаетъ
„	203,	2	„	„	неизвѣстнаго . . .	неизвѣстнаго,
„	205,	21/22	„	„	прибѣкаемъ . . .	прибѣгаемъ
„	206,	13	„	снизу:	= 3	= 3,

III. Выписка изъ журнала Учеб. Комит. при Святѣйшемъ Синодѣ отъ 17 декабря 1897 г.

„Курсъ элементарной алгебры“ г. Юревича обладаетъ многими несомнѣнными достоинствами и **является цѣннымъ вкладомъ** въ учебно-математическую литературу. Полнота, всесторонность и *безусловная ясность и простота* изложенія не только ставятъ предлагаемый учебникъ на ряду съ лучшими существовавшими до сихъ поръ, но и *даютъ ему право на предпочтеніе.*

IV. Объ элементарной геометріи.

Геометрія г. Юревича при достаточной строгости изложенія отличается **ясностью и простотою.** Въ концѣ книги прибавленъ довольно подробно изложенный „курсъ землемѣрія“, что дѣлаетъ книгу пригодной для учительскихъ семинарій. Съ внѣшней стороны книга производитъ пріятное впечатлѣніе: она напечатана четкимъ шрифтомъ на хорошей бумагѣ и иллюстрирована большимъ количествомъ чертежей (322 чертежа) Р. Вѣст. 17 февраля 1898 г.



19469

Во всѣхъ извѣстныхъ книжныхъ магазинахъ продаются слѣдующія изданія:

1. **Г. Я. Юревичъ. Курсъ элементарной алгебры** и системат. сборникъ алгебраич. задачъ. Часть I. Цѣна 80 к.
2. Часть II. Цѣна 80 коп.
3. **Г. Я. Юревичъ. Алгебра** и собраніе алгебраич. задачъ (2368 зад.) для духовныхъ семинарій и женскихъ гимназій. Стр. 312. Цѣна 75 к.
4. **Г. Я. Юревичъ. Извлеченіе квадратныхъ и кубичныхъ корней изъ чиселъ.** Пособіе при изученіи геометріи для тѣхъ учебныхъ заведеній, въ которыхъ не проходится алгебра. Стр. 42. Цѣна 15 коп.
5. **Г. Я. Юревичъ. Элементарная геометрія** и собраніе геометрич. задачъ, съ прилож. краткаго курса землемѣрія. Для женск. гимн., учительск. семин. и городск. училищъ. Стр. 216. Цѣна 60 коп.
6. **Г. Я. Юревичъ. Краткая геометрія** для двуклассныхъ сельскихъ училищъ. Стр. 96. Цѣна 30 коп.
7. **Г. Я. Юревичъ. Приготовительный курсъ геометріи.** Для городскихъ училищъ. Стр. 32. Цѣна 15 коп.
8. **Г. Я. Юревичъ. Краткій курсъ землемѣрія.** Стр. 47. Цѣна 20 коп.
9. **Г. Я. Юревичъ. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ** для нач. учил. Составленъ примѣнительно къ требованіямъ примѣрныхъ прогр. утвержд. Министр. Нар. Просвѣщ. 7 февр. 1897 г. Стр. 144. Цѣна 15 к.
10. **Г. Я. Юревичъ. Собраніе ариѳметическихъ задачъ** для приготовительн. классовъ средн. учебн. заведеній. Стр. 106. Цѣна 25 коп.
11. **G. Jurewicz. Zbiór zadań arytmetycznych** dl szkół początkowych. 148. Cena 20 kop. Warszawa.
12. **Я. Максимовъ и И. Глушинъ. Родная пчелка.** Книга для чтенія въ приготовительныхъ классахъ среднихъ учебн. заведеній и въ низшихъ училищахъ. Цѣна 50 коп.
13. **Я. Максимовъ. Русская грамматика,** съ больш. количествомъ письм. упражн. Руководство для учениковъ младш. классовъ средн. учебн. зав. и низшихъ училищъ. Стр. 84. Цѣна 10 коп.
14. **Я. Максимовъ. Сборникъ диктантовъ** въ связи съ прохожденіемъ начальной грамматики. Цѣна 20 коп.
15. **П. Говѣйно. Начатки русскаго правописанія.** Сборникъ диктовокъ для приготовительныхъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній и для начальныхъ училищъ. Цѣна 20 коп.
16. **П. Ковалевскій. Географія для начальн. училищъ.** Стр. 88. Цѣна 10 к.
17. **Н. Лебедевъ. Русскія прописи.** Стр. 16. Цѣна 5 коп.
18. **Н. Лебедевъ. Новыя русскія прописи.** Прямое письмо съ приложеніемъ образцовъ другихъ болѣе употребительныхъ шрифтовъ Стр. 16. Цѣна 6 коп.
19. **Н. Лебедевъ. Курсъ чистописанія.** Прописи русскія, французскія и нѣмецкія съ приложеніемъ образцовъ другихъ болѣе употребительныхъ шрифтовъ. Стр. 32. Цѣна 15 коп.
20. **Н. Лебедевъ. Чтеніе рукописнаго.** Стр. 48. Цѣна 20 коп.
21. **Таблицы** для нахожденія процентныхъ отношеній и вывода **средняго балла.** Пособіе при составленіи отчетовъ для начальниковъ учебныхъ заведеній и классныхъ наставниковъ. Цѣна 20 коп.
22. **М. Зернова. Новая русская азбука.** Стр. 32. Цѣна **одна** коп.

Склады изданій Г. Я. Юревича:

Главный складъ книгоиздательства въ г. Ригѣ, Мельничная улица № 7.

Имѣются склады: у **Н. П. Карбасникова** въ С.-Петербургѣ, Москвѣ, Вильнѣ и Варшавѣ; у **Бр. Башмаковыхъ** въ С.-Петербургѣ, Москвѣ и Казани; у **Н. Я. Оглоблина** въ С.-Петербургѣ и Кіевѣ; у **В. Думнова** въ Москвѣ и С.-Петербургѣ; у **А. С. Панафидиной** въ Москвѣ и С.-Петербургѣ; въ магазинѣ **„Образованіе“** въ Одессѣ; у **Сыркина** въ Вильнѣ; у **Фабіанскаго** въ Варшавѣ; у **И. Розова** въ Кіевѣ и Одессѣ; въ **„Учебномъ магазинѣ“** въ С.-Петербургѣ.

Въ главномъ складѣ всѣ поименованныя выше книги всегда имѣются въ достаточномъ количествѣ.